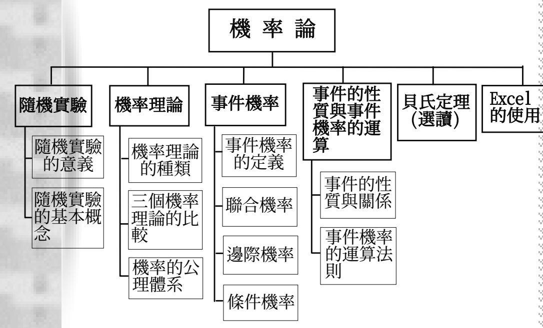
5 機率論

學習目的

1. 定義機率。
2. 了解機率的基本觀念如隨機實驗，實驗結果，事件，樣本空間等。
3. 描述古典的機率理論、客觀的機率理論及主觀的機率理論。
4. 熟習聯合機率、邊際機率及條件機率的定義及其應用。
5. 學習獨立、不獨立與互斥事件間的相互關係。
6. 認識貝氏定理及應用貝氏定理。

本章結構



隨機實驗

隨機實驗的意義

隨機實驗是一種過程(process)，是一種不能確定預知會發生何種結果的實驗方式。在實驗前已知所有可能出現的結果，而實驗後的結果為所有可能的結果之一，但實驗前並未能正確的、肯定的預知它是何種結果。隨機實驗可重複進行，而經過長期重複實驗，出現的結果會遵循某一些統計規則。

表5.1 隨機實驗、出象與樣本空間

隨機實驗	出象	樣本空間
產品品質檢驗	良品，不良品	$S=\{$良品, 不良品$\}$
一場足球賽	贏，輸，和	$S=\{$贏, 輸, 和$\}$
丟一個骰子 1 次	1,2,3,4,5,6	$S=\{1,2,3,4,5,6\}$
新生小孩的性別	男性，女性	$S=\{$男性, 女性$\}$
參加研究所考試	錄取，未錄取	$S=\{$錄取, 未錄取$\}$

隨機實驗的基本觀念

基本出象

隨機實驗的每個可能的結果稱為基本出象，又稱為樣本點。

樣本空間

一個隨機實驗中，所有可能出象的集合稱為樣本空間。通常以英文大寫字母S表示之。

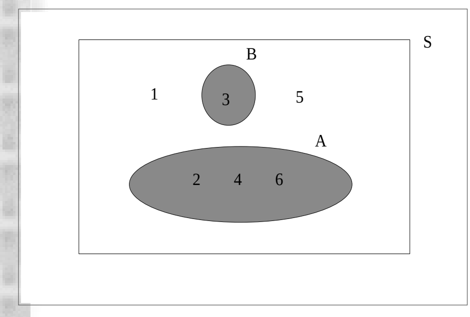
表5.1 隨機實驗、出象與樣本空間

隨機實驗	出象	樣本空間
產品品質檢驗	良品，不良品	$S=\{$良品, 不良品$\}$
一場足球賽	贏，輸，和	$S=\{$贏, 輸, 和$\}$
丟一個骰子 1 次	1,2,3,4,5,6	$S=\{1,2,3,4,5,6\}$
新生小孩的性別	男性，女性	$S=\{$男性, 女性$\}$
參加研究所考試	錄取，未錄取	$S=\{$錄取, 未錄取$\}$

隨機實驗的基本觀念

- **事件**
  樣本空間的部份集合稱為事件。
- **簡單事件**
  事件只包含一個基本出象者稱為簡單事件。
- **複合事件**
  事件包含二個或二個以上基本出象者稱為複合事件。

圖5.2 簡單事件與複合事件



機率理論

- **古典的機率理論**
  $P(E)=\frac{1}{N}$
- **客觀的機率理論**
  $P(E)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(E)}{n}$
  式中：$n(E)$ 表示事件E出現的次數，n表隨機實驗的總次數。
- **主觀的機率理論**
  $P(E)=$[對事件E發生的信心]

機率的公理

- **公理一**
  $0\le P(E_i)\le 1$，表示任一事件E_i若可能發生，則其機率大於0小於1。若事件不發生，則其機率等於0。若事件一定發生，則機率等於1。
- **公理二**
  $P(E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_n)=P(E_1)+P(E_2)+\cdots+P(E_n)$，
  $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 互斥，表示若有n個互斥事件 $E_1,E_2,\cdots,E_n$，則E_1發生或E_2發生或E_n發生的機率為其個別機率的和。
- **公理三**
  $P(S)=1$，表示樣本空間中所有事件均發生的機率總合等於1。

事件機率

- **事件機率的定義**
  設事件A定義於隨機實驗的樣本空間，其發生之機率$P(A)$為事件A之基本出象的機率總和，即$P(A)=\sum P(E_i)$，$E_i\in A$。
- **聯合機率的定義**
  二個或二個以上事件同時發生的機率稱為聯合機率。
- **邊際機率的定義**
  在有二個或二個以上類別的樣本空間中，若僅考慮某一類別個別發生的機率者稱為邊際機率。
- **條件機率的定義**
  令A、B為定義於樣本空間的事件，已知發生事件B之後再發生事件A的機率，稱為事件A的條件機率。

表5.3 聯合機率分配表

A\B	B_1	B_2	……	B_C
A_1	$P(A_1\cap B_1)$	$P(A_1\cap B_2)$	……	$P(A_1\cap B_c)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_r	$P(A_r\cap B_1)$	$P(A_r\cap B_2)$	……	$P(A_r\cap B_c)$

圖5.4 事件A的條件機率

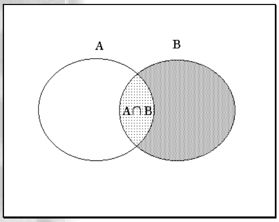


圖5.5 事件B的條件機率

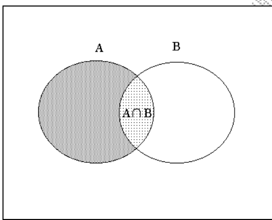


表5.5 性別差異與飲料消費的機率表

		飲料消費		合計 $P(A_i)$
		高消費（B_1）	低消費（B_2）	
性別	男性（A_1）	$P(A_1 \cap B_1)=0.139$	$P(A_1 \cap B_2)=0.241$	$P(A_1)=0.38$
	女性（A_2）	$P(A_2 \cap B_1)=0.116$	$P(A_2 \cap B_2)=0.504$	$P(A_2)=0.62$
合計 $P(B_i)$		$P(B_1)=0.255$	$P(B_2)=0.745$	1.00

事件的性質與關係

- **獨立事件**
  獨立事件係指一事件的發生不影響其他事件發生的機率。
- **兩事件獨立**
  若A、B兩事件合乎於下列任一條件，則A、B互為獨立。
  ① $P(A|B)=P(A)$ ② $P(B|A)=P(B)$ ③ $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$
- **相依事件**
  相依事件係指一事件的發生影響其他事件發生的機率。
- **互斥事件**
  如果事件沒有共同的元素(樣本點)，則稱為互斥事件。

表5.8 企業規模與企業流程再造的機率分配

		企業流程再造（B）		邊際機率
		否（B_1）	是（B_2）	
規模（A）	中型企業（A_1）	15/47	9/47	24/47
	大型企業（A_2）	8/47	15/47	23/47
	邊際機率	23/47	24/47	1

資料來源：李泰霖、許秉瑜、何應欽：「國內ERP成效大體檢」《資訊與電腦》雜誌，2001年8月。

事件的性質與關係

- **加法定理**
  兩事件的聯集
  $$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
  如果事件A與事件B互斥，則
  $$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$
- **乘法定理**
  二事件的交集
  $$P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A|B)$$
  如果A、B獨立($P(A|B)=P(A)$)，則
  $$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$
- **分割定理(條件機率的情形)**
  若$A_1,\cdots,A_r$為分割集合，B為一事件，則$P(B)=\sum_{i=1}^{r}P(B\cap A_i)$，
  且由$P(B\cap A_i)=P(A_i)\cdot P(B|A_i)$，故
  $$P(B)=\sum_{i=1}^{r}P(B\cap A_i)==\sum_{i=1}^{r}P(A_i)\cdot P(B|A_i)$$

貝氏定理

若已知$A_1,\cdots,A_r$為樣本空間的分割集合，B為某事件，且已知$P(A_i)$及$P(B|A_i)$，則B條件下發生事件A_i之機率表為$P(A_i|B)$：

$$P(A_i|B)=\frac{P(B\cap A_i)}{P(B)}=\frac{P(B\cap A_i)}{P(B\cap A_1)+P(B\cap A_2)+\cdots+P(B\cap A_r)}$$

$$=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+\cdots+P(A_r)P(B|A_r)}$$

式中：$P(A_i)$：事前機率，$P(B|A_i)$：概似機率，$P(A_i|B)$：事後機率。

圖5.9 貝氏定理的應用