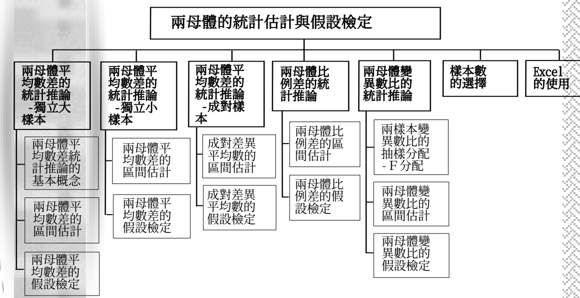
12　兩母體的統計估計與假設檢定

學習目的

1. 了解獨立大樣本及小樣本下兩母體平均數差的區間估計與假設檢定的方法、步驟及其應用。
2. 了解成對樣本成對差的區間估計與假設檢定的方法與步驟。
3. 了解兩母體比例差的區間估計與假設檢定的方法與步驟。
4. 熟悉兩樣本變異數比的抽樣分配 - *F* 分配。
5. 學習兩母體變異數比的假設檢定的方法、步驟及其應用。
6. 熟悉估計兩母體平均數差、比例差時樣本數的選擇。
7. 利用Excel來作兩母體差異的統計估計與假設檢定。

第12章　兩母體的統計估計與假設檢定
應用統計學

本章結構



第12章　兩母體的統計估計與假設檢定
應用統計學

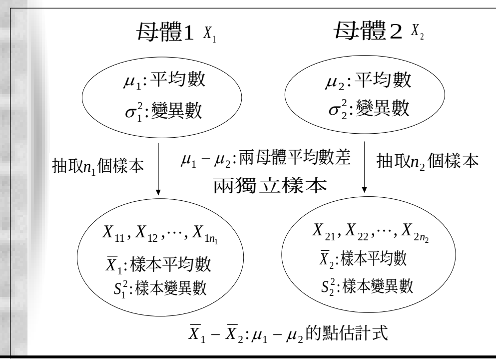
兩個母體平均數差的統計推論—獨立大樣本

- **獨立樣本**

  若從一個母體抽出的樣本不影響從另一個母體抽出的樣本，則這兩個樣本為獨立樣本。所謂大樣本是指 $n_1 \ge 30$，且 $n_2 \ge 30$。

第12章　兩母體的統計估計與假設檢定
應用統計學

圖12.1　兩母體平均數差的估計



第12章　兩母體的統計估計與假設檢定
應用統計學

兩個母體平均數差的區間估計—獨立大樣本

- **$\bar{X}_1-\bar{X}_2$ 的抽樣分配**

  從兩個母體抽取兩個大且獨立的樣本，$\bar{X}_1-\bar{X}_2$ 的抽樣分配為(近似)常態分配，

  其平均數為：$\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\mu_1-\mu_2$

  變異數為：$V(\bar{X}_1-\bar{X}_2)=\sigma^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}$

- **$\sigma^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$ 的估計式**

  $\sigma^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$ 的點估計式為：

  $$S^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}$$

  式中：S_1^2，S_2^2 分別為樣本的變異數。

  $S_1^2=\dfrac{\sum(X_1-\bar{X}_1)^2}{n_1-1}$，$S_2^2=\dfrac{\sum(X_2-\bar{X}_2)^2}{n_2-1}$。

第12章　兩母體的統計估計與假設檢定
應用統計學

兩個母體平均數差的區間估計—獨立大樣本

- **獨立大樣本母體平均數差 $\mu_1-\mu_2$ 的信賴區間**

  ①兩母體變異數已知

  $(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\pm Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$

  式中：$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{(\sigma_1^2/n_1)+(\sigma_2^2/n_2)}$

  ②兩母體變異數未知

  $(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\pm Z_{\alpha/2}S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$

  式中：$S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{(S_1^2/n_1)+(S_2^2/n_2)}$

表12.1　達美樂新竹地區分店每日營業額統計

單位：元

季節	雨季（3月至5月）	乾季（10月至12月）
樣本數	92	92
平均數	1,815,233	1,789,992
標準差	85,313	106,125

兩個母體平均數差的區間估計—獨立大樣本

- **獨立大樣本母體平均數差 $\mu_1-\mu_2$ 的信賴區間**

③兩母體變異數未知但已知相等

$$(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\pm Z_{\alpha/2}S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$$

式中：$S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=S_P\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}$　　$S_p=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$

- **兩樣本的混合變異數**

$$S_p^2=\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_{1i}-\bar{X}_1)^2+\sum_{i=1}^{n_2}(X_{2i}-\bar{X}_2)^2}{n_1+n_2-2}=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

式中：$S_1^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_{1i}-\bar{X}_1)^2}{n_1-1}$，　$S_2^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n_2}(X_{2i}-\bar{X}_2)^2}{n_2-1}$。

表12.2　美樂新竹區分店外送機車里程統計

單位：公里

季節	雨季（3月至5月）	乾季（10月至12月）
樣本數（輛）	38	34
平均里程	852	445
標準差	231	162

兩個母體平均數差的假設檢定—獨立大樣本

- **獨立大樣本母體平均數差 $\mu_1-\mu_2$ 的檢定統計量**

①兩母體變異數已知

$$Z=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$$

式中：$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{(\sigma_1^2/n_1)+(\sigma_2^2/n_2)}$

②兩母體變異數未知

$$Z=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$$

式中：$S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{(S_1^2/n_1)+(S_2^2/n_2)}$

③兩母體變異數未知但已知相等

$$Z=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$$

式中：$S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=S_p\sqrt{(1/n_1)+(1/n_2)}$

式中的 $\mu_1-\mu_2$ 為虛無假設的猜測值，S_P 為混合標準差。

圖12.2 銀行客戶等待時間差異的檢定

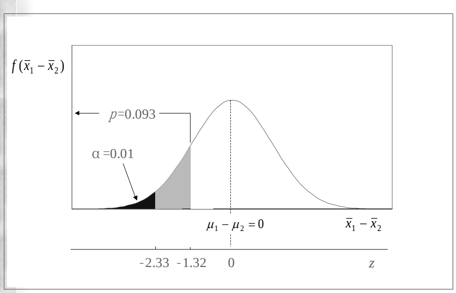


表12.3　大樣本兩母體平均數差的檢定

	A	B	C
1	z 檢定：兩個母體平均數差異檢定		
2			
3		變數 1	變數 2
4	平均數	10	10.5
5	已知的變異數	6.25	12.25
6	觀察值個數	100	100
7	假設的均數差	0	
8	z	-1.31685	
9	P(Z<=z) 單尾	0.093944	
10	臨界值：單尾	2.326342	
11	P(Z<=z) 雙尾	0.187888	
12	臨界值：雙尾	2.575835	

表12.4　少男和少女的平均兄弟姊妹數

性 別	樣本數	平均數	標準差
少男	1,798	1.8	1.0
少女	1,690	2.0	1.1

（資料來源：平均數和標準差為分組資料估計數，《臺閩地區少年身心狀況調查報告》，內政部統計處，1999年9月。）

圖11.5　獨立小樣本母體平均數差的假設檢定

- 獨立小樣本
  - 母體分配已知為常態分配
    - 兩母體變異數 σ_1^2, σ_2^2 已知　$\dfrac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma^2}{n_2}}} \sim Z$
    - 兩母體變異數 σ_1^2, σ_2^2 未知，但相等　$\dfrac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$
    - 兩母體變異數 σ_1^2, σ_2^2 未知　$\dfrac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S^2}{n_1}+\dfrac{S^2}{n_2}}} \sim t_\varphi$
  - 母體分配為非常態分配
    - 兩母體變異數 σ_1^2, σ_2^2 已知　柴比氏定理
    - 兩母體變異數 σ_1^2, σ_2^2 未知，但相等　無母數統計學討論
    - 兩母體變異數 σ_1^2, σ_2^2 未知　無母數統計學討論

兩個母體平均數差的統計推論—獨立小樣本

- **t分配在做母體平均數差 $\mu_1-\mu_2$ 統計推論的假設條件**

  在下列假設條件為真的情況下，t分配可用來做母體平均數差 $\mu_1-\mu_2$ 的統計推論：

  ①兩母體為常態分配

  ②兩樣本為獨立小樣本($n_1<30$，$n_2<30$)

  ③兩個母體變異數 σ_1^2，σ_2^2 未知

兩個母體平均數差的區間估計—獨立小樣本

- **獨立小樣本常態母體平均數差的信賴區間**

  ①兩母體為常態且兩個變異數均已知

  $(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\pm Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$

  式中：$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{(\sigma_1^2/n_1)+(\sigma_2^2/n_2)}$

  ②兩母體變異數未知

  $(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\pm t_{\varphi,\alpha/2}S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$

  式中：$S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{(S_1^2/n_1)+(S_2^2/n_2)}$，$t$的自由度為$\varphi$ 。

  ③兩母體變異數未知但已知相等

  $(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\pm t_{v,\alpha/2}S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$

  式中：$S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=S_p\sqrt{(1/n_1)+(1/n_2)}$，$S_P$ 為混合樣本標準差，自由度 $v=n_1+n_2-2$。

表12.5　男、女性病患門診醫療費用的調查結果

	樣本數	樣本平均數	樣本標準差
男性病患	14	830	283
女性病患	15	748	275

（資料來源：《全民健康保險統計》，中央健康保險局，2001年6月。）

兩個母體平均數差的假設檢定—獨立小樣本

- **獨立小樣本常態母體平均數差 $\mu_1-\mu_2$ 的檢定統計量**

  ①兩母體變異數已知

  $$Z=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$$

  式中：$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}$

  ②兩母體變異數未知

  $$t=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$$

  式中：$S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}$ (自由度為φ)

兩個母體平均數差的假設檢定—獨立小樣本

- **獨立小樣本常態母體平均數差 $\mu_1-\mu_2$ 的檢定統計量**

③兩母體變異數未知但已知相等

$$t=\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S_{\overline{X}_1-\overline{X}_2}}$$

式中：$S_{\overline{X}_1-\overline{X}_2}=S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$ (自由度為 $v=n_1+n_2-2$)

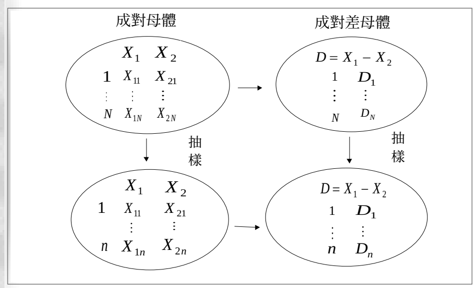
表12.6　兩公車載客的差異

客運公司	載客人數	平均數	標準差	樣本數
甲	17,22,25,37,18	23.8	8.04	5
乙	45,36,38,26,45,31,24,37	35.25	7.85	8

表12.7 兩母體平均數差異的檢定（變異數不相等）

	A	B	C	D	E	F
1	t 檢定：兩個母體平均數差的檢定，假設變異數不相等					
2						
3		變數 1	變數 2			
4	平均數	23.8	35.25			
5	變異數	64.7	61.64286			
6	觀察值個數	5	8			
7	假設的均數差	0				
8	自由度	8				
9	t 統計	-2.51996				
10	P(T<=t) 單尾	0.017905				
11	臨界值：單尾	1.859548				
12	P(T<=t) 雙尾	0.035811				
13	臨界值：雙尾	2.306006				

圖12.4 兩成對母體與成對樣本



兩個母體平均數差的統計推論—成對樣本

- **成對差大樣本平均數 $\overline{D}$ 的抽樣分配**

$$\mu_{\overline{D}}=\mu_D\text{，}\quad \sigma^2_{\overline{D}}=\frac{\sigma^2_D}{n}$$

- **成對差母體變異數 σ^2_D 的估計式**

$$S^2_{\overline{D}}=\frac{S^2_D}{n}$$

兩個母體平均數差的區間估計—成對樣本

- **成對母體平均數差 μ_D 的信賴區間**

①大樣本變異數 σ^2_D 已知

$\overline{D}\pm Z_{\alpha/2}\sigma_{\overline{D}}$　式中：$\sigma_{\overline{D}}=\frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}$

②大樣本變異數 σ^2_D 未知

$\overline{D}\pm Z_{\alpha/2}S_{\overline{D}}$　式中：$S_{\overline{D}}=\frac{S_D}{\sqrt{n}}$，$S_D=\sqrt{\frac{\sum D^2-(\sum D)^2/n}{n-1}}$。

③小樣本母體分配為常態分配，σ^2_D 已知

$\overline{D}\pm Z_{\alpha/2}\sigma_{\overline{D}}$

④小樣本母體分配為常態分配，σ^2_D 未知

$\overline{D}\pm t_{n-1,\alpha/2}S_{\overline{D}}$

表12.9 減肥學童體重的變化 單位；公斤

學童代號	減肥前體重 X_1	減肥後體重 X_2	體重差 $D = X_1 - X_2$	D^2
1	75	65	10	100
2	82	68	14	196
3	61	53	8	64
4	62	57	5	25
5	77	62	15	225
			$\sum D = 52$	$\sum D^2 = 610$

兩個母體平均數差的假設檢定—成對樣本

- **成對母體平均數差 μ_D 的檢定統計量**

①大樣本母體變異數已知： $Z = \dfrac{\overline{D} - \mu_D}{\dfrac{\sigma_D}{\sqrt{n}}}$

②大樣本母體變異數未知： $Z = \dfrac{\overline{D} - \mu_D}{\dfrac{S_D}{\sqrt{n}}}$

③小樣本母體常態變異數已知： $Z = \dfrac{\overline{D} - \mu_D}{\dfrac{\sigma_D}{\sqrt{n}}}$

④小樣本母體常態變異數未知： $t = \dfrac{\overline{D} - \mu_D}{\dfrac{S_D}{\sqrt{n}}}$

表12.10 成對資料 單位：公里

試驗前每公升里程數 X_{1i}	試驗後每公升里程數 X_{2i}	成對差 D_i	D_i^2
10.3	11.2	-0.9	0.81
10.2	12.3	-2.1	4.41
9.7	11.2	-1.5	2.25
9.2	9.9	-0.7	0.49
11.2	11.8	-0.6	0.36
		$\sum D = -5.8$	$\sum D^2 = 8.32$

表12.11 成對母體平均數差的檢定

	A	B	C
1	t 檢定：成對母體平均數差異檢定		
2			
3		變數 1	變數 2
4	平均數	10.12	11.28
5	變異數	0.557	0.807
6	觀察值個數	5	5
7	皮耳森相關係數	0.720415	
8	假設的均數差	0	
9	自由度	4	
10	t 統計	-4.11151	
11	P(T<=t) 單尾	0.007357	
12	臨界值：單尾	2.131846	
13	P(T<=t) 雙尾	0.014714	
14	臨界值：雙尾	2.776451	

兩個母體比例差的統計推論

- **獨立大樣本母體比例 $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ 的抽樣分配**

平均數 $E(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = \mu_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = p_1 - p_2$

變異數 $V(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = \sigma^2_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = \dfrac{p_1 q_1}{n_1} + \dfrac{p_2 q_2}{n_2}$

式中：$q_1 = 1 - p_1$， $q_2 = 1 - p_2$。

兩個母體比例差的區間估計

- **大樣本母體比例差的信賴區間**

$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm Z_{\alpha/2} S_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}$

式中：$S_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = \sqrt{\dfrac{\hat{p}_1 \hat{q}_1}{n_1} + \dfrac{\hat{p}_2 \hat{q}_2}{n_2}}$

- **母體比例差的信賴區間**

$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm Z_{\alpha/2} S_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}$

式中：$S_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = \sqrt{\dfrac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{n_1} + \dfrac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{n_2}}$

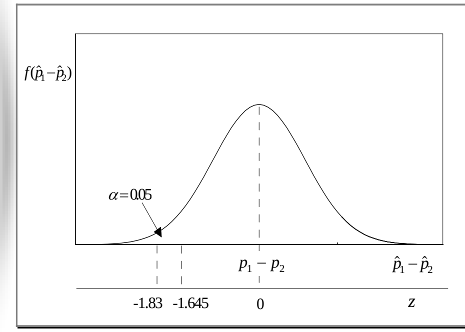
兩個母體比例差的假設檢定

- **母體比例差的檢定統計量**

$$Z=\frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-(p_1-p_2)}{S_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}$$

式中：$S_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}=\sqrt{\dfrac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1}+\dfrac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}$

圖12.5　男女性參加集點贈品活動的比例



兩個母體變異數比的統計推論

- $\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}$ **的分配**

$$\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F_{n_1-1,n_2-1}$$

- ***F*分配的定理**

設$U\sim\chi^2_{v_1}$，$W\sim\chi^2_{v_2}$，且U與W獨立，則

$$\frac{U/v_1}{W/v_2}=\frac{\chi^2_{v_1}/v_1}{\chi^2_{v_2}/v_2}\sim F_{v_1,v_2}$$

F 分配的性質

①F 分配為一右偏分配。F 分配決定於兩個自由度v_1，v_2，不同的v_1，v_2有不同的F分配。

②F分配的平均數與變異數

$$E(F)=\frac{v_2}{v_2-2}\quad(v_2>2)，\quad V(F)=\frac{2v_2^2(v_1+v_2-2)}{v_1(v_2-2)^2(v_2-4)}\quad(v_2>4)$$

③F 分配的定理

$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F_{n_{1-1},n_{2-1}}$$

④$t_v^2=F_{1,v}$

意即自由度v的t隨機變數的平方恰為自由度1與v的F隨機變數。

④F 分配的倒數性質

F的倒數仍為一F分配，其自由度為v_2,v_1，即

$$\frac{1}{F_{v_1,v_2}}\sim F_{v_2,v_1}$$

圖12.6　自由度不同的F分配

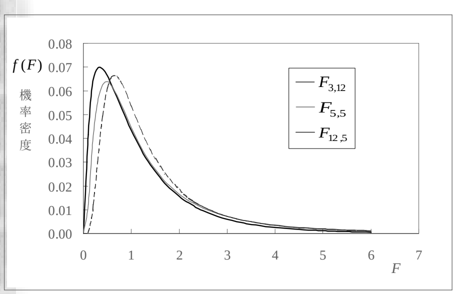
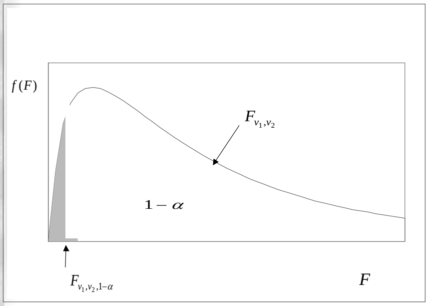


表12.13　F 配表(α=0.05)

v_2 / v_1	1	2	3	4	5	⋯	9	10	⋯	120	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	⋯	240.5	241.9	⋯	253.3	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	⋯	19.38	19.40	⋯	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	⋯	8.81	8.79	⋯	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	⋯	6.00	5.96	⋯	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	⋯	4.77	$\boxed{4.74}$	⋯	4.40	4.36
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋯	⋮	⋮	⋯	⋮	⋮
10	4.96	4.10	3.71	3.48	$\boxed{3.33}$	⋯	3.02	2.98	⋯	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	⋯	2.90	2.85	⋯	2.45	2.40
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋯	⋮	⋮	⋯	⋮	⋮
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	⋯	1.88	1.83	⋯	1.22	1

圖12.7　F 分配



兩個母體變異數比的區間估計

- F 分配

$$\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F_{n_1-1,n_2-1}$$

- **母體變異數比的信賴區間**

$$\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{n_1-1,n_2-1,\alpha/2}}\le\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\le\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{n_1-1,n_2-1,1-\alpha/2}}$$

兩個母體變異數比的假設檢定

- ***F*檢定統計量**

$$F=\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}$$

- ***F*檢定的決策法則**

①單尾檢定：若 F 值 $>F_\alpha$，則拒絕虛無假設 H_0。
②雙尾檢定：若 F 值 $>F_{\alpha/2}$，則拒絕虛無假設 H_0。
F_α，$F_{\alpha/2}$ 為臨界值。

表12.14　台積電、華邦電月股價報酬率分析(87/1—90/6)

公 司	平均價	標準差	樣本數
台積電	0.02943	0.1754	41
華邦電	0.02101	0.1877	41

圖12.11　股票投資風險的檢定

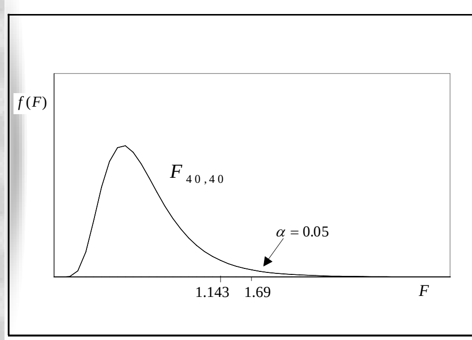


表12.15　兩個常態母體變異數的檢定

	A	B	C
1	F檢定：兩個常態母體變異數的檢定		
2			
3		2001立委選前	2001立委選後
4	平均數	84.40909091	143.2857143
5	變異數	458.2532468	1166.114286
6	觀察值個數	22	21
7	自由度	21	20
8	F	0.392974559	
9	P(F<=f) 單尾	0.019532088	
10	臨界值：單尾	0.477092144	

樣本數的選擇

- **估計兩母體平均數差時的樣本數**

$$n \geq \frac{Z_{\alpha/2}^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{d^2}$$

- **估計兩母體比例差時的樣本數**

$$n \geq \frac{Z_{\alpha/2}^2(2)(0.25)}{d^2}$$