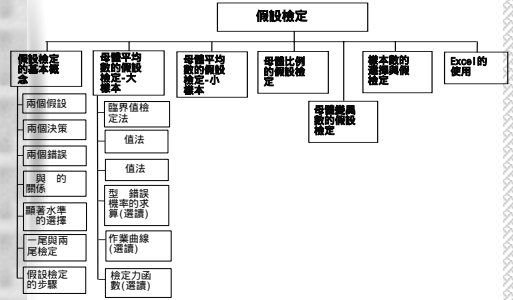


11 假設檢定

學習目的

1. 了解假設檢定的基本概念與型 錯誤與型 錯誤。
2. 學習假設檢定的步驟。
3. 學習一尾與兩尾假設檢定的方法。
4. 學習傳統檢定方法與P值法。
5. 了解 β 值、作業特性曲線與檢定力函數。
6. 了解母體平均數的假設檢定的方法、步驟及其應用。
7. 了解母體比例、母體變異數的假設檢定的方法、步驟及其應用。
8. 了解檢定時，在控制 α 、 β 的水準下，樣本數的選擇。
9. 利用Excel 來做假設檢定。

本章結構



假設檢定的基本概念

○ 假設檢定的意義

對有關母體參數的假設，利用樣本的訊息，決定接受(不拒絕)該假設或拒絕該假設的統計方法。

假設檢定的基本概念

○ 兩個假設

① 虛無假設

對母體參數的某一假設或主張假定其為真實的(除非證明其為非真)一個假設稱為虛無假設。

② 對立假設

對立假設是相對於虛無假設而對母體參數提出的另一個不同的假設或主張。

設立假設的原則

- ① 將想要利用樣本統計量去驗證的假設設為對立假設，想要否定的假設設為虛無假設。
- ② 錯誤地拒絕某一假設的後果較錯誤地接受或不拒絕該某一假設的後果為嚴重者，將該假設設為虛無假設。
- ③ 將他人的主張做為虛無假設，亦即假定他人的主張是真實的。
- ④ 以反面主張做為虛無假設。

假設檢定的基本概念

○ 兩個決策

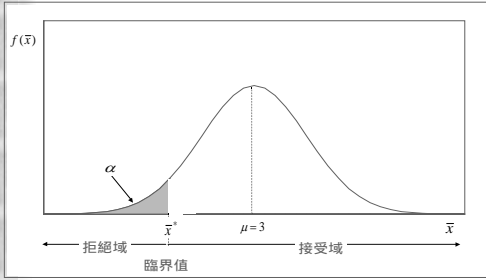
① 不拒絕 H_0 (或接受 H_0)

若樣本統計量落在接受域，則「不拒絕」或「接受」虛無假設。

② 拒絕 H_0

若樣本統計量落在拒絕域，則「拒絕」虛無假設，推斷對立假設 H_1 為真。

圖11.1 拒絕域與接受域



假設檢定的基本概念

○ 兩個錯誤

①型I錯誤

當 H_0 為真，而拒絕 H_0 所發生的錯誤，稱為型I錯誤(type I error)。型I錯誤的機率為 α ，表為

$$\alpha = P(\text{拒絕 } H_0 | H_0 \text{ 為真})$$

又稱為顯著水準(significance level)。

②型II錯誤

當 H_0 為假(或 H_1 為真)，而不拒絕 H_0 所發生的錯誤，稱為型II錯誤(type II error)。型II錯誤的機率以 β 表示：

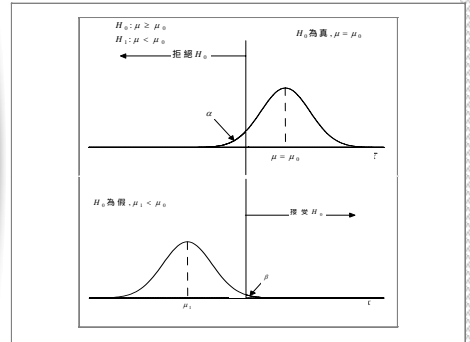
$$\beta = P(\text{II}) = P(\text{不拒絕 } H_0 | H_0 \text{ 為假})$$

$1 - \beta$ 稱為檢定力，表示 H_0 為假，不拒絕 H_0 的機率。

表11.1 假設檢定決策正確與錯誤的機率

		真實情況	
		H_0 為真	H_1 為真
決策	不拒絕 H_0	$1 - \alpha$ (正確機率)	β (錯誤機率)
	拒絕 H_0	α (錯誤機率)	$1 - \beta$ (正確機率)

圖11.2 型 I 與型 II 錯誤的機率

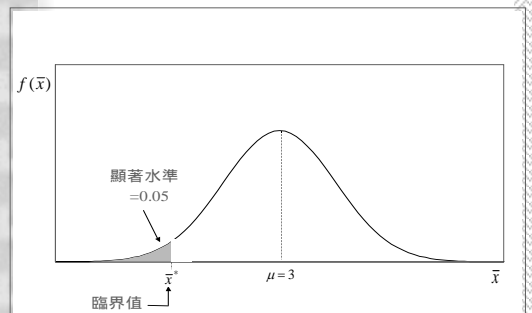


假設檢定的基本概念

○ 顯著水準

在假設檢定過程中，檢定人員所能容忍的型 I 錯誤最大的機率。以 α 表示。

圖11.3 顯著水準



假設檢定的基本概念

○ 一尾檢定

只有一個拒絕域的檢定稱為一尾檢定。拒絕域在左尾的稱為左尾檢定，拒絕域在右尾的尾檢定稱為右尾檢定。

○ 兩尾檢定

有兩個拒絕域的檢定稱為兩尾檢定，兩尾各有一個拒絕域。

圖11.4 左尾檢定

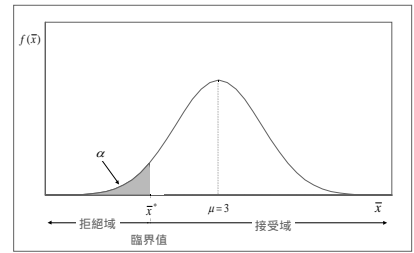


圖11.5 右尾檢定

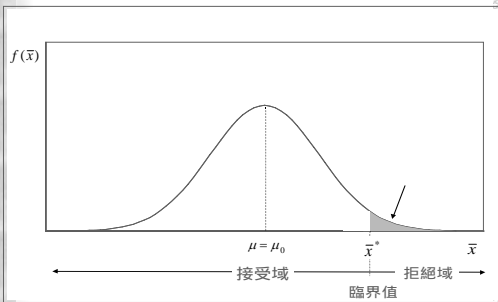


圖11.6 雙尾檢定

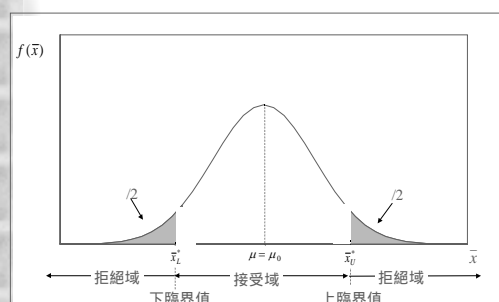


表11.2 假設檢定的符號

	雙尾檢定	左尾檢定	右尾檢定
虛無假設 H_0 的符號	=	≥	≤
對立假設 H_1 的符號	≠	<	>
拒絕域	在左右兩尾	在左尾	在右尾
α 值	$\alpha/2$	α	α

假設檢定的基本概念

○ 假設檢定的步驟

- ① 步驟1 設立兩個假設
- ② 步驟2 選擇檢定統計量
- ③ 步驟3 決定拒絕域及接受域(行動法則或決策法則)
- ④ 步驟4 計算檢定統計量(或將檢定統計量與臨界值比較)
- ⑤ 步驟5 下結論

母體平均數的假設檢定—大樣本

○ 臨界值檢定法

在既定顯著水準 α 下，計算出臨界值，決定拒絕域與接受域以決定拒絕或接受虛無假設的方法。

○ 臨界值法的決策法則

- ①左尾檢定：若 $\bar{x} \geq \bar{x}^*$ ，則接受虛無假設。
若 $\bar{x} < \bar{x}^*$ ，則拒絕虛無假設。臨界值 $\bar{x}^* = \mu_0 - Z_{\alpha} \sigma_{\bar{x}}$ 。
- ②右尾檢定：若 $\bar{x} \leq \bar{x}^*$ ，則接受虛無假設。
若 $\bar{x} > \bar{x}^*$ ，則拒絕虛無假設。臨界值 $\bar{x}^* = \mu_0 + Z_{\alpha} \sigma_{\bar{x}}$ 。
- ③兩尾檢定：若 $\bar{x}_L^* \leq \bar{x} \leq \bar{x}_U^*$ ，則接受虛無假設。
若 $\bar{x} < \bar{x}_L^*$ 或 $\bar{x} > \bar{x}_U^*$ ，則拒絕虛無假設。下臨界值 $\bar{x}_L^* = \mu_0 - Z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{x}}$ ，上臨界值 $\bar{x}_U^* = \mu_0 + Z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{x}}$ 。

圖11.8 臨界值與接受域拒絕域

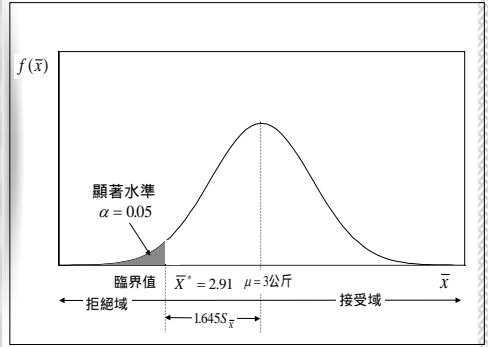


圖11.9 樣本平均數與臨界值的比較

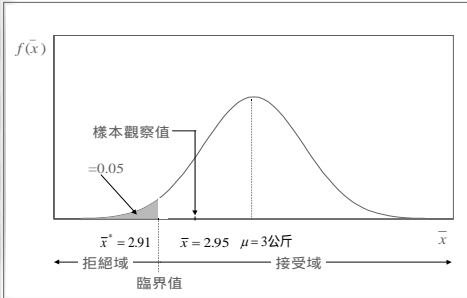


圖11.10 假設檢定的過程

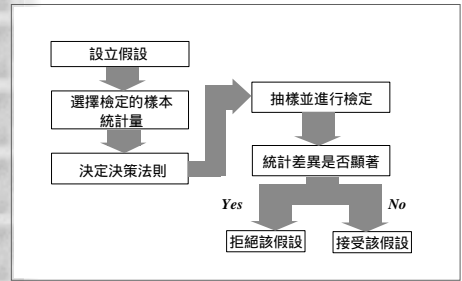


表11.3 白米的樣本平均數與標準差

	A	B	C	D
1	白米重量			
2				
3	平均數	2.95		
4	標準誤	0.054331		
5	標準差	0.380318		
6	變異數	0.144642		
7	個數	49		
8	信賴度(95%)	0.106487		

母體平均數的假設檢定—大樣本

○ Z值法

Z值法或稱標準統計量檢定法。它是先將檢定統計量化為標準檢定統計量，然後再進行檢定的方法。

○ Z值法的決策法則

- ①左尾檢定：若 $Z \geq -Z_{\alpha}$ ，則接受虛無假設。
若 $Z < -Z_{\alpha}$ ，則拒絕虛無假設。
- ②右尾檢定：若 $Z \leq Z_{\alpha}$ ，則接受虛無假設。
反之，若 $Z > Z_{\alpha}$ ，則拒絕虛無假設。
- ③兩尾檢定：若 $-Z_{\alpha/2} \leq Z \leq Z_{\alpha/2}$ ，則接受虛無假設。
反之，若 $Z < -Z_{\alpha/2}$ 或 $Z > Z_{\alpha/2}$ ，則拒絕虛無假設。

圖11.13 蘋果重量的假設檢定

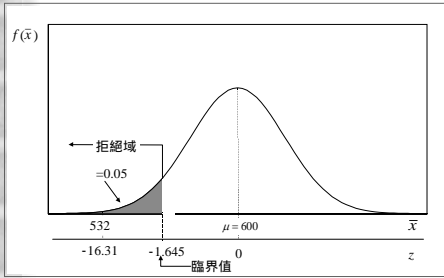
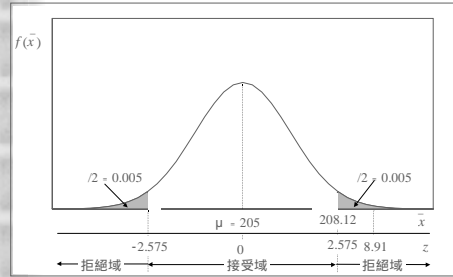


圖11.14 平均可用晶片數的檢定



母體平均數的假設檢定—大樣本

○ P值

在 H_0 為真的情況下，若採右尾檢定， P 值為大於樣本結果的機率值；若採左尾檢定， P 值為小於樣本結果的機率值，若採兩尾檢定， P 值為大於或小於樣本結果的機率值的2倍。

○ P值檢定法的決策法則

- ①若 P 值 $< \alpha$ ，則拒絕虛無假設 H_0 。
- ②若 P 值 $\geq \alpha$ ，則接受虛無假設 H_0 。

圖11.16 白米重量的檢定P值法

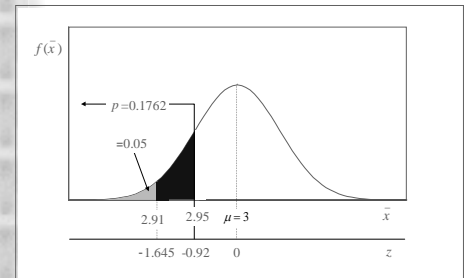


圖11.18 所得申報的檢定—P值法

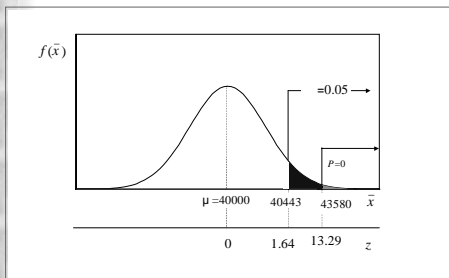
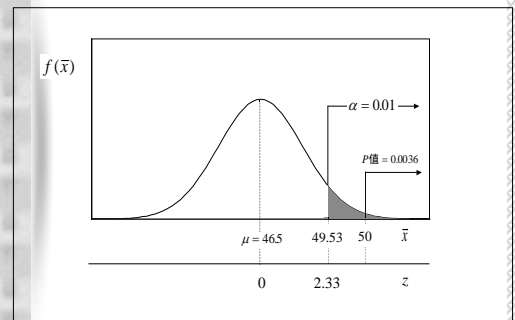


圖11.19 農業從業人口平均年齡的檢定

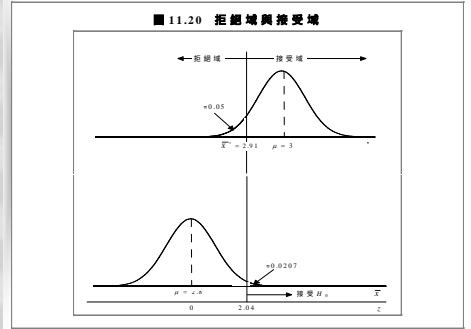


母體平均數的假設檢定—大樣本

○ 型II錯誤機率求算的步驟

- ① 確定接受域的範圍。
- ② 計算 H_1 為真時，接受域範圍的機率。

圖11.20 拒絕域與接受域



作業曲線

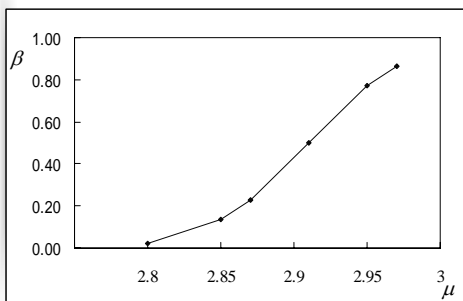
○ 作業曲線的意義

在對立假設所有可能的母體參數值 μ 下，將犯型II錯誤的機率 β 繪成一條曲線，稱為作業特性曲線(operation characteristic curve)，簡稱為OCC。

表11.4 型 II 錯誤的機率 β

真正母體參數 μ	$Z = \frac{2.91-3}{0.38/\sqrt{49}}$	型II錯誤 β	檢定力 $1-\beta$
2.80	2.04	0.0207	0.9793
2.85	1.11	0.1335	0.8665
2.87	0.74	0.2296	0.7704
2.91	0	0.5000	0.5000
2.95	-0.74	0.7704	0.2296
2.97	-1.11	0.8665	0.1335

圖11.21 作業特性曲線



檢定力函數

○ 檢定力函數

檢定力是 H_0 為真時，做正確檢定決策的機率。檢定力函數表為：

$$1 - \beta = P(\text{拒絕 } H_0 | H_0 \text{ 為假}) = P(\text{接受 } H_1 | H_1 \text{ 為真})$$

此乃表示檢定力等於 減去型II錯誤的機率。

圖11.22 檢定力曲線

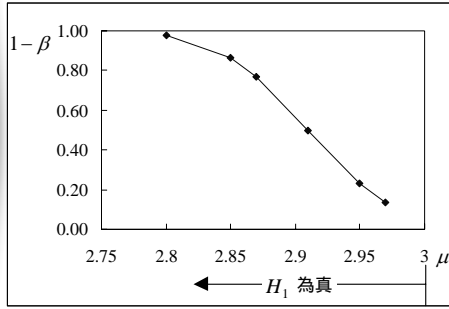


圖11.23 電暖器使用壽命的檢定

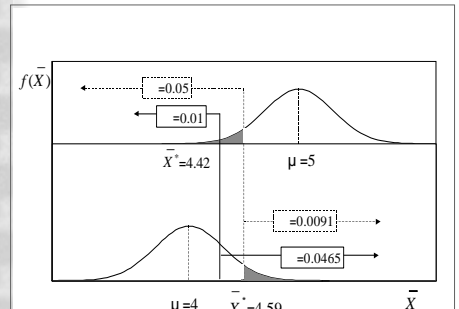


圖10.24 母體平均數的檢定--小樣本

小樣本	母體常態	σ^2 已知	$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} \sim Z$
		σ^2 未知	$\frac{\bar{X} - \mu_0}{S_{\bar{X}}} \sim t_{n-1}$
	母體非常態	σ^2 已知	柴比氏定理
		σ^2 未知	無母數統計學

母體平均數的假設檢定—小樣本

○ t 分配在假設檢定時的通用條件

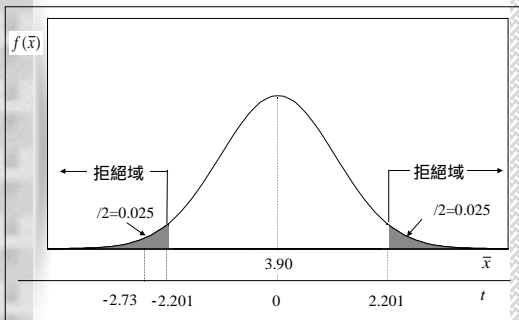
- ① 小樣本的情況下 ($n < 30$)
- ② 母體為常態分配
- ③ 母體標準差 σ 未知

○ t 檢定統計量

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S_{\bar{X}}}$$

式中： μ_0 為猜測值。 \bar{X} 為樣本平均數，樣本平均數的標準差 $S_{\bar{X}} = S/\sqrt{n}$ 。 t 的自由度為 $n-1$ 。

圖11.25 跑壘速度的檢定



母體比例的假設檢定

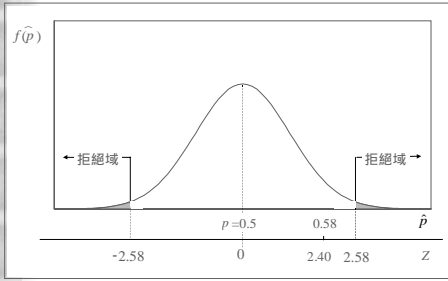
○ 檢定統計量

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sigma_{\hat{p}}}$$

式中： p_0 為猜測值， \hat{p} 為樣本比例，樣本比例的標準差

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{p_0 q_0 / n}$$

圖11.27 電視節目收視率的檢定



母體變異數的假設檢定

○ 檢定統計量

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

式中： σ_0^2 為母體變異數的猜測值， S^2 為樣本變異數， $n-1$ 為自由度。

○ 決策法則

① 左尾檢定

若檢定統計量 $\chi^2 < \chi_{n-1, 1-\alpha}^2$ ，則拒絕 H_0 。

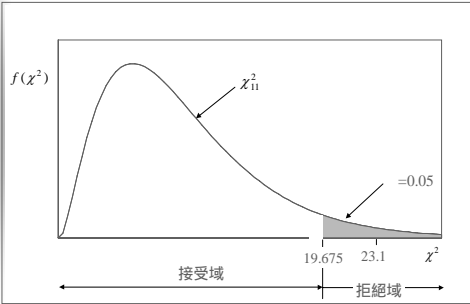
② 右尾檢定

若檢定統計量 $\chi^2 > \chi_{n-1, \alpha}^2$ ，則拒絕 H_0 。

③ 雙尾檢定

$\chi^2 > \chi_{n-1, \alpha/2}^2$ 或 $\chi^2 < \chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2$ ，則拒絕 H_0 。其中 $n-1$ 為 χ^2 的自由度。

圖11.29 硬碟機庫存量變異的檢定



樣本數的選擇與假設檢定

○ 母體平均數假設檢定的樣本數

① 單尾檢定

$$n = \frac{\sigma^2(Z_\alpha + Z_\beta)^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2}$$

② 雙尾檢定

$$n = \frac{\sigma^2(Z_{\alpha/2} + Z_\beta)^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2}$$

樣本數的選擇與假設檢定

○ 母體比例假設檢定的樣本數

① 單尾檢定

$$n = \frac{(Z_\alpha \sqrt{p_0(1-p_0)} + Z_\beta \sqrt{p_1(1-p_1)})^2}{(p_1 - p_0)^2}$$

② 雙尾檢定

$$n = \frac{[Z_{\alpha/2} \sqrt{p_0(1-p_0)} + Z_\beta \sqrt{p_1(1-p_1)}]^2}{(p_1 - p_0)^2}$$