

第10章 假設檢定

學習目的

1. 瞭解假設檢定的基本概念與型 I 錯誤與型 II 錯誤。
2. 熟習假設檢定的步驟。
3. 學習一尾與兩尾假設檢定的方法。
4. 學習傳統檢定方法與 P 值法。
5. 瞭解 β 值、作業特性曲線與檢定力函數。
6. 瞭解母體平均數的假設檢定的方法、步驟及其應用。
7. 瞭解母體比例、母體變異數的假設檢定的方法、步驟及其應用。
8. 瞭解檢定時，在控制 α 、 β 的水準下，樣本數的選擇。
9. 利用 Excel 來做假設檢定。

含課本重點整理，惟仍應研讀課本之詳細內容

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第10章 假設檢定

假設檢定

○ 假設檢定的意義

對有關母體參數的假設，利用樣本的訊息，決定接受(不拒絕)該假設或拒絕該假設的統計方法。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第10章 假設檢定

假設檢定的基本概念

○ 兩個假設

① 虛無假設

對母體參數的某一假設或主張假定其為真實的(除非證明其為非真)一個假設稱為虛無假設。

② 對立假設

對立假設是相對於虛無假設而對母體參數提出的另一個不同的假設或主張。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第10章 假設檢定

假設檢定的基本概念

○ 設立假設的原則

① 將想要利用樣本統計量去驗證的假設設為對立假設，想要否定的假設設為虛無假設。

② 錯誤地拒絕某一假設的後果較錯誤地接受或不拒絕該某一假設的後果為嚴重者，將該假設設為虛無假設。

③ 將他人的主張做為虛無假設，亦即假定他人的主張是真實的。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第10章 假設檢定

假設檢定的基本概念

○ 兩個決策

① 不拒絕 H_0 (或接受 H_0)

若樣本統計量落在接受域，則「不拒絕」或「接受」虛無假設。

② 拒絕 H_0

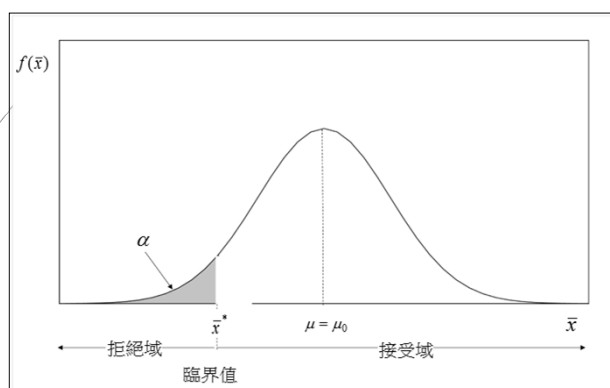
若樣本統計量落在拒絕域，則「拒絕」虛無假設，推斷對立假設 H_1 為真。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第10章 假設檢定

假設檢定的基本概念

圖10.1 拒絕域與接受域



現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第10章 假設檢定

假設檢定的基本概念

○ 兩個錯誤

① 型I錯誤

當 H_0 為真，而拒絕 H_0 所發生的錯誤，稱為型I錯誤(type I error)。型I錯誤的機率為 α ，表為

$$\alpha = P(\text{拒絕}H_0 | H_0 \text{為真})$$

α 又稱為顯著水準(significance level)。

② 型II錯誤

當 H_0 為假(或 H_1 為真)，而不拒絕 H_0 所發生的錯誤，稱為型II錯誤(type II error)。型II錯誤的機率以 β 表示：

$$\beta = P(\text{II}) = P(\text{不拒絕}H_0 | H_0 \text{為假})$$

$1 - \beta$ 稱為檢定力，表示 H_0 為假，不拒絕 H_0 的機率。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第10章 假設檢定

假設檢定的基本概念

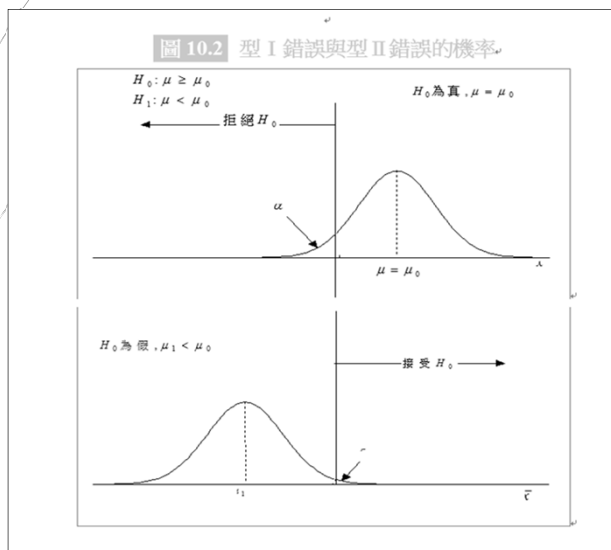
表 10.1 假設檢定決策正確與錯誤的機率

		真實情況	
		H_0 為真	H_1 為真
決策	不拒絕 H_0	$1 - \alpha$ (正確機率)	β (錯誤機率)
	拒絕 H_0	α (錯誤機率)	$1 - \beta$ (正確機率)

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第10章 假設檢定

假設檢定的基本概念



第10章 假設檢定

假設檢定的基本概念

○ 顯著水準

在假設檢定過程中，檢定人員所能容忍的型 I 錯誤最大的機率。以 α 表示。

第10章 假設檢定

假設檢定的基本概念

○ 一尾檢定

只有一個拒絕域的檢定稱為一尾檢定。拒絕域在左尾的稱為左尾檢定，拒絕域在右尾的尾檢定稱為右尾檢定。

○ 雙尾檢定

有兩個拒絕域的檢定稱為兩尾檢定，兩尾各有一個拒絕域。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第10章 假設檢定

假設檢定的基本概念

圖10.5 左尾檢定

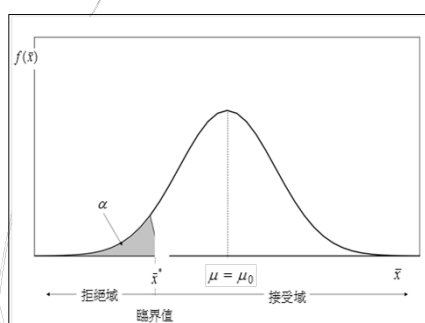
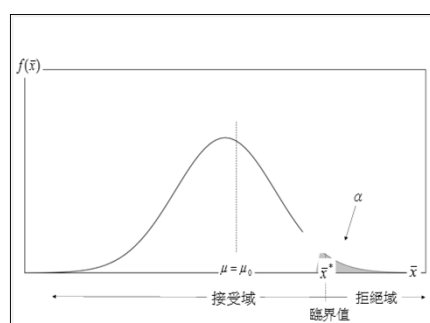


圖10.6 右尾檢定

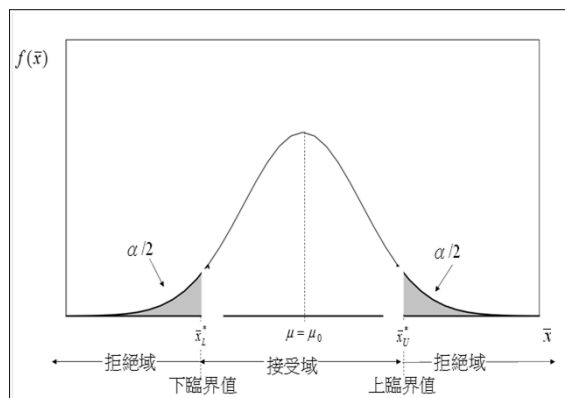


現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第10章 假設檢定

假設檢定的基本概念

圖10.7 雙尾檢定



現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第10章 假設檢定

假設檢定的基本概念

表 10.2 假設檢定的符號

	雙尾檢定	左尾檢定	右尾檢定
虛無假設 H_0 的符號	$=$	\geq	\leq
對立假設 H_1 的符號	\neq	$<$	$>$
拒絕域	在左右雙尾	在左尾	在右尾
α 值	$\alpha/2$	α	α

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第10章 假設檢定

假設檢定的基本概念

○ 假設檢定的步驟

- ①步驟1 設立兩個假設
- ②步驟2 選擇檢定統計量
- ③步驟3 決定拒絕域及接受域(行動法則或決策法則)
- ④步驟4 計算檢定統計量(或將檢定統計量與臨界值比較)
- ⑤步驟5 下結論

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第10章 假設檢定

母體平均數的假設檢定—大樣本

○ 臨界值檢定法

在既定顯著水準 α 下，計算出臨界值，決定拒絕域與接受域以決定拒絕或接受虛無假設的方法。

○ 臨界值法的決策法則

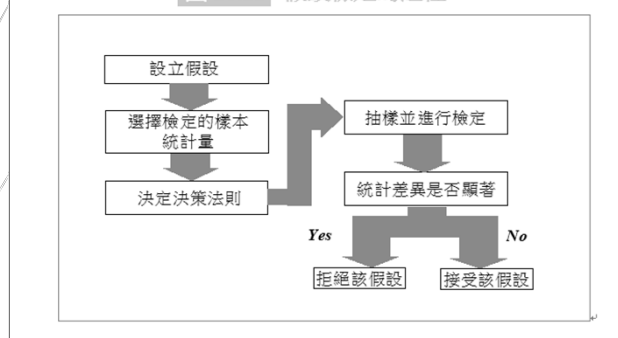
- ①左尾檢定：若 $\bar{X} \geq \bar{X}^*$ ，則接受虛無假設。
若 $\bar{X} < \bar{X}^*$ ，則拒絕虛無假設。臨界值 $\bar{X}^* = \mu_0 - Z_\alpha \sigma_{\bar{X}}$ 。
- ②右尾檢定：若 $\bar{X} \leq \bar{X}^*$ ，則接受虛無假設。
若 $\bar{X} > \bar{X}^*$ ，則拒絕虛無假設。臨界值 $\bar{X}^* = \mu_0 + Z_\alpha \sigma_{\bar{X}}$ 。
- ③兩尾檢定：若 $\bar{X}_L^* \leq \bar{X} \leq \bar{X}_U^*$ ，則接受虛無假設。
若 $\bar{X} < \bar{X}_L^*$ 或 $\bar{X} > \bar{X}_U^*$ ，則拒絕虛無假設。下臨界值 $\bar{X}_L^* = \mu_0 - Z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{X}}$ ，上臨界值 $\bar{X}_U^* = \mu_0 + Z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{X}}$ 。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第10章 假設檢定

母體平均數的假設檢定—大樣本

圖 10.11 假設檢定的過程



現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第10章 假設檢定

母體平均數的假設檢定—大樣本

○ Z值法

Z值法或稱標準統計量檢定法。它是先將檢定統計量化為標準檢定統計量，然後再進行檢定的方法。

○ Z值法的決策法則

①左尾檢定：若 $Z \geq -Z_\alpha$ ，則接受虛無假設。

若 $Z < -Z_\alpha$ ，則拒絕虛無假設。

②右尾檢定：若 $Z \leq Z_\alpha$ ，則接受虛無假設。

反之，若 $Z > Z_\alpha$ ，則拒絕虛無假設。

③兩尾檢定：若 $-Z_{\alpha/2} \leq Z \leq Z_{\alpha/2}$ ，則接受虛無假設。

反之，若 $Z < -Z_{\alpha/2}$ 或 $Z > Z_{\alpha/2}$ ，則拒絕虛無假設。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第10章 假設檢定

母體平均數的假設檢定—大樣本

○ P 值

在 H_0 為真的情況下，若採右尾檢定， P 值為大於樣本結果的機率值；若採左尾檢定， P 值為小於樣本結果的機率值，若採兩尾檢定， P 值為大於或小於樣本結果的機率值的2倍。

○ P 值檢定法的決策法則

- ①若 P 值 $< \alpha$ ，則拒絕虛無假設 H_0 。
- ②若 P 值 $\geq \alpha$ ，則接受虛無假設 H_0 。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第10章 假設檢定

母體平均數的假設檢定—大樣本

○ 左尾檢定的 P 值

$$P\text{值} = P(\bar{X} \leq \bar{X}_0 \mid \mu = \mu_0)$$

○ 右尾檢定的 P 值

$$P\text{值} = P(\bar{X} \geq \bar{X}_0 \mid \mu = \mu_0)$$

○ 雙尾檢定的 P 值

$$\text{若 } \bar{X}_0 > \mu_0, \text{ 則 } P\text{值} = 2 \times P(\bar{X} \geq \bar{X}_0 \mid \mu = \mu_0)$$

$$\text{若 } \bar{X}_0 < \mu_0, \text{ 則 } P\text{值} = 2 \times P(\bar{X} \leq \bar{X}_0 \mid \mu = \mu_0)$$

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第10章 假設檢定

母體平均數的假設檢定—大樣本

○ 型II錯誤機率求算的步驟

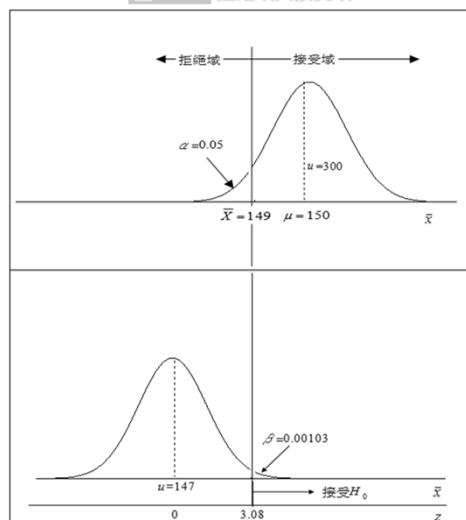
- ① 確定接受域的範圍。
- ② 計算 H_1 為真時，接受域範圍的機率。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第10章 假設檢定

母體平均數的假設檢定—大樣本

圖 10.17 拒絕域與接受域



雙葉書廊發行 2015

第10章 假設檢定

母體平均數的假設檢定—大樣本

○ 檢定力函數

檢定力是 H_0 為真時，做正確檢定決策的機率。檢定力函數表為：

$$1 - \beta = P(\text{拒絕}H_0 \mid H_0 \text{為假}) = P(\text{接受}H_1 \mid H_1 \text{為真})$$

此乃表示檢定力等於1減去型II錯誤的機率 β 。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第10章 假設檢定

母體平均數的假設檢定—小樣本

○ t 分配在假設檢定時的適用條件

- ① 小樣本的情況下($n < 30$)
- ② 母體為常態分配
- ③ 母體標準差 σ 未知

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第10章 假設檢定

母體平均數的假設檢定—小樣本

○ t 檢定統計量

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S_{\bar{X}}}$$

式中： μ_0 為猜測值。 \bar{X} 為樣本平均數，樣本平均數的標準差

$S_{\bar{X}} = S/\sqrt{n}$ 。 t 的自由度為 $n-1$ 。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第10章 假設檢定

母體比例的假設檢定

○ 檢定統計量

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sigma_{\hat{p}}}$$

式中： p_0 為猜測值， \hat{p} 為樣本比例， $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{p_0 q_0 / n}$ 為樣本比例的標準差。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第10章 假設檢定

母體變異數的假設檢定

○ 檢定統計量

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

式中： σ_0^2 為母體變異數的猜測值， S^2 為樣本變異數， $n-1$ 為自由度。

○ 決策法則

① 左尾檢定

若檢定統計量 $\chi^2 < \chi_{n-1, 1-\alpha}^2$ ，則拒絕 H_0 。

② 右尾檢定

若檢定統計量 $\chi^2 > \chi_{n-1, \alpha}^2$ ，則拒絕 H_0 。

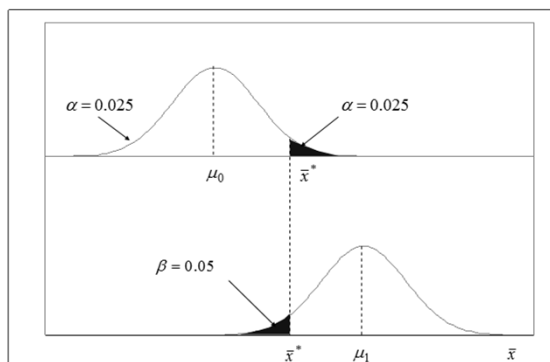
③ 雙尾檢定

$\chi^2 > \chi_{n-1, \alpha/2}^2$ 或 $\chi^2 < \chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2$ ，則拒絕 H_0 。其中 $n-1$ 為 χ^2 的自由度。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第10章 假設檢定

樣本數的選擇與假設檢定

圖10.25 $\alpha \leq 0.05$ 與 $\beta \leq 0.05$ 

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第10章 假設檢定

樣本數的選擇與假設檢定

○ 母體平均數假設檢定的樣本數

① 單尾檢定

$$n = \frac{\sigma^2 (Z_\alpha + Z_\beta)^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2}$$

② 雙尾檢定

$$n = \frac{\sigma^2 (Z_{\alpha/2} + Z_\beta)^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2}$$

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第10章 假設檢定

樣本數的選擇與假設檢定

○ 母體比例假設檢定的樣本數

① 單尾檢定

$$n = \frac{(Z_\alpha \sqrt{p_0(1-p_0)} + Z_\beta \sqrt{p_1(1-p_1)})^2}{(p_1 - p_0)^2}$$

② 雙尾檢定

$$n = \frac{[Z_{\alpha/2} \sqrt{p_0(1-p_0)} + Z_\beta \sqrt{p_1(1-p_1)}]^2}{(p_1 - p_0)^2}$$

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第10章 假設檢定

10.2 針對中共軍事演習，我方必須嚴陣以待，以防其假戲真做。設有一雷達監視員，當雷達上有不明飛行物體，他必須在下兩項中做一決定：

H_0 : 一切良好，只是偶然干擾而已。

H_1 : 有敵機來襲。

- ① 「錯誤警報」為何種誤差？(Type I or Type II)；其機率表示為(填 α, β)。
- ② 「疏忽而未放警報」為……誤差，其機率表示為……(填 α, β)。
- ③ 「寧可錯放警報」為……增加而……減少……(填 α, β)。

10.3 一醫學報告指出，歐美婦女中乳癌患者的平均死亡年齡為 55 歲。我國的衛生單位認為，我國的乳癌患者的平均死亡年齡低於歐美國家。國內一研究機構對 36 位乳癌患者所作的追蹤調查發現，患者的平均死亡年齡為 52 歲，標準差為 6 歲，在顯著水準為 1% 之下，試分別以檢定統計量檢定法、標準統計量檢定法、信賴區間檢定法、 P 值法檢定衛生單位的說法是否正確。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第10章 假設檢定

10.5 一輪胎製造商宣稱其所生產的輪胎至少可行駛 6 萬公里。已知這種輪胎可行駛的里程數為常態分配，且母體標準差為 2,600 公里。今測試 16 個輪胎，得其平均行駛里程數為 59,000 公里，試問：

- ① 虛無假設與對立假設各為何？
- ② 在 1% 的顯著水準下，是否要拒絕虛無假設？
- ③ 若樣本數增為 49 個，樣本平均數仍為 59,000 公里，則題 2 之答案是否一樣？
- ④ 續題 ②，若該輪胎的真正行駛里程數為 59,500 公里，則檢定力為多少？

10.7 陳教授懷疑學生家庭作業互相抄襲，因為此家庭作業成績的標準差很小。根據以往的經驗，標準差約為 10 分，且作業成績呈常態分配。上個星期該班共有 30 位學生繳交作業，作業成績的標準差為 6 分，試問在顯著水準為 5% 時，陳教授的懷疑是否獲得證實？

10.8 總統大選如火如荼，今調查某候選人之支持率，假設隨機抽出樣本數 1,000 人，其中支持者佔 615 人，則：

- ① 試估計其支持比例。
- ② 求此候選人支持率之 95% 的信賴區間。
- ③ 檢定此位候選人之支持度是否超過 6 成 ($\alpha = 0.05$)？

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015