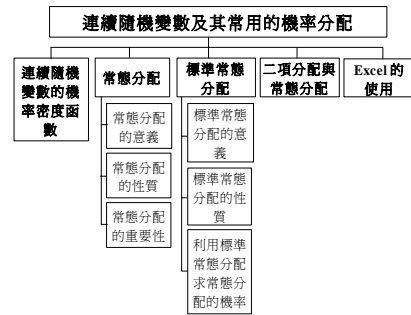


9 連續隨機變數及其常用的機率分配

○ 學習目的

1. 熟悉並計算連續機率分配機率函數的期望值與變異數。
2. 瞭解常態分配的意義、特質與重要性。
3. 瞭解標準常態分配的意義、性質與利用標準常態分配求算機率。
4. 比較二項分配與常態分配。
5. 利用Excel求算各個連續機率分配並繪製圖形。

本章結構



連續隨機變數的機率密度函數

○ 連續隨機變數的機率分配

單一間斷連續隨機變數的機率分配是表示，連續隨機變數的任意兩變量間發生機率（或相對次數）的分布情形。

連續隨機變數的機率密度函數

○ 連續隨機變數的機率密度函數

設 X 為連續隨機變數，其值為 $a \leq X \leq b$ ，若 $f(x)$ 滿足下列二條件：

① $f(x) \geq 0$

② $\int_a^b f(x) dx = 1$

則 $f(x)$ 為 X 的機率密度函數(probability density function)，簡稱 pdf。

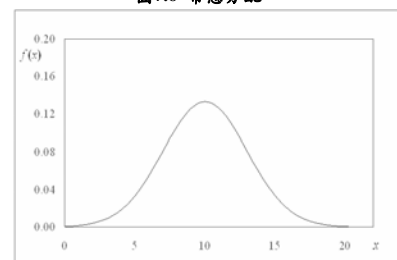
常用的連續隨機變數的機率分配

○ 常用的連續機率分配

連續隨機變數常用的機率分配包括常態分配 (normal distribution)、標準常態分配 (standard normal distribution)、均等分配 (uniform distribution) 及指數分配 (exponential distribution) 等。

常態分配

圖7.6 常態分配



上圖為平均數 $\mu = 10$ ，標準差為 $\sigma = 3$ 的常態分配。

常態分配

表9.1 大四計量經濟學學期成績的分配

x 計量經濟學學期成績	P(x)
0~20	0.0299
20~40	0.2332
40~60	0.4714
60~80	0.2332
80~100	0.0299

常態分配

○ 常態分配的定義

設X為連續隨機變數，若其機率密度函數為：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty$$

式中： $-\infty < \mu < \infty, \sigma > 0, \pi = 3.1416, e = 2.7183$ 。

則稱此 $f(x)$ 為常態分配。

常態分配

○ 常態分配的特質

- ① 常態分配 $f(x)$ 為以 μ 為中心的對稱分配。
- ② 常態分配曲線下面的面積總和等於1。
- ③ 常態分配 $f(x)$ 在 $X = \mu \pm \sigma$ 時有一轉折點。
- ④ 常態分配曲線的兩尾無限延伸。
- ⑤ 常態分配的機率範圍可分為三種情況。

常態分配

圖9.2 平均數相同標準差不同

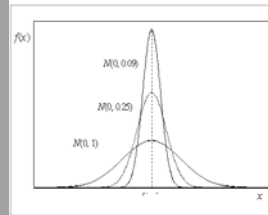
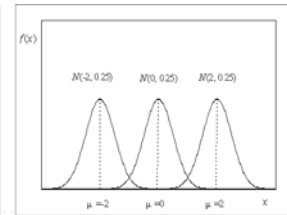
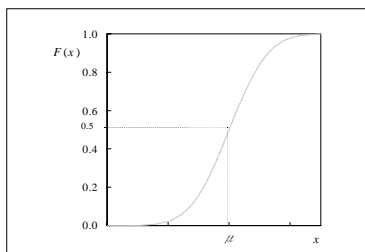


圖9.3 平均數不同標準差相同



常態分配

圖9.4 常態分配的累加機率



常態分配

○ 常態分配的平均數

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \mu$$

○ 變異數

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2$$

常態分配

圖9.5 常態分配的對稱性

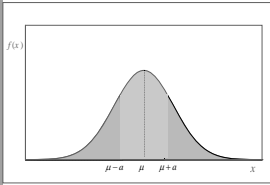
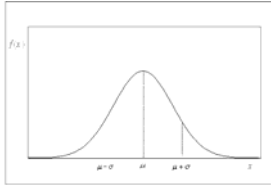


圖9.6 常態分配的轉折點



林惠玲 陳正倉著 雙葉書報發行 2008

常態分配

○ 常態分配的機率範圍

①常態隨機變數的值落在離開平均數1個標準差等距的範圍(即 $\mu \pm \sigma$)之機率為：

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.6826$$

②常態隨機變數的值落在離開平均數2個標準差等距的範圍(即 $\mu \pm 2\sigma$)之機率為：

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.9544$$

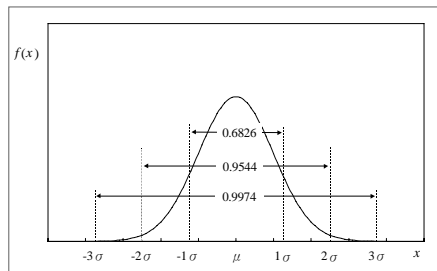
③常態隨機變數的值落在離開平均數3個標準差等距的範圍(即 $\mu \pm 3\sigma$)之機率為：

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0.9974$$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書報發行 2008

常態分配

圖9.7 常態分配的機率範圍



林惠玲 陳正倉著 雙葉書報發行 2008

常態分配

○ 常態分配的重要性

- ①常態分配可做為在統計推論程序中的基本模式
- ②常態分配可進行許多統計推論
- ③常態分配構成大樣本推論統計的基礎
- ④間斷機率分配在某些條件下可利用常態分配求其近似值

林惠玲 陳正倉著 雙葉書報發行 2008

標準常態分配

○ 標準常態分配

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

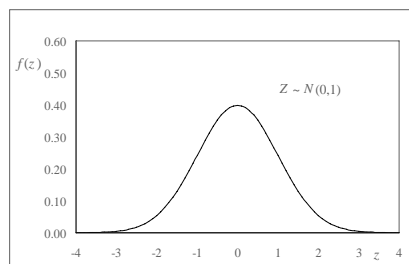
式中 $Z = (X - \mu) / \sigma$ 標準常態變數。標準常態分配其平均數為

0，變異數為1。一般以 $Z \sim N(0,1)$ 來表示。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書報發行 2008

標準常態分配

圖9.8 標準常態曲線



林惠玲 陳正倉著 雙葉書報發行 2008

標準常態分配

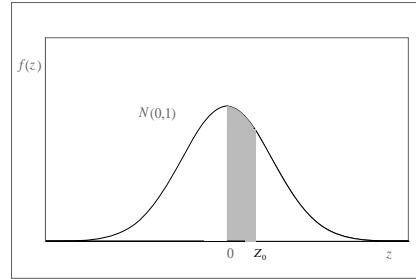
◎標準常態分配的特性

- ①標準常態分配具有常態分配的特質，唯其平均數 $\mu_z = 0$ ，變異數 $\sigma_z^2 = 1$ ，標準差 $\sigma_z = 1$ ，它是常態分配的特殊例子。
- ②標準常態分配的任何值域的機率可查標準常態機率值表而獲得。標準常態分配機率值表中的機率值代表 $P(0 < Z < z_0)$ ，它表示標準常態變數 $Z = 0$ 與任何已知正的 Z 值 z_0 間的機率。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書報發行 2008

標準常態分配

圖9.9 標準常態分配機率(0與 z_0 間)



林惠玲 陳正倉著 雙葉書報發行 2008

標準常態分配

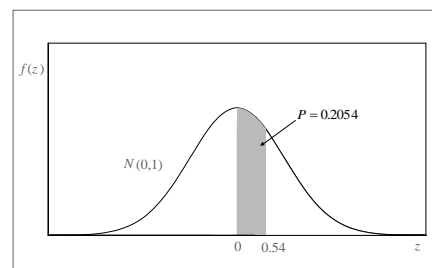
表9.2 標準常態機率分配表

z	Z 的第二位小數									
	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633

林惠玲 陳正倉著 雙葉書報發行 2008

標準常態分配

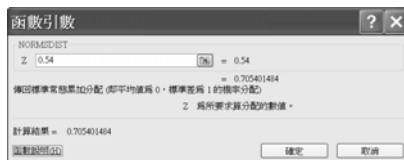
圖9.10 Z在0與0.54間的機率值



林惠玲 陳正倉著 雙葉書報發行 2008

標準常態分配

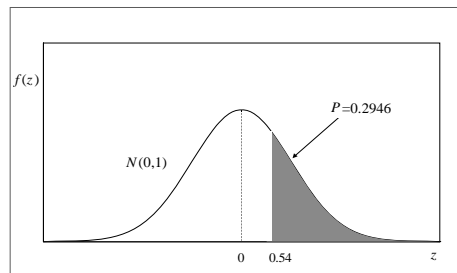
圖9.12 標準常態機率對話方塊



林惠玲 陳正倉著 雙葉書報發行 2008

標準常態分配

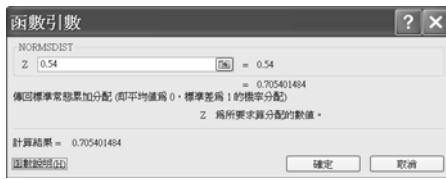
圖9.11 $Z > 0.54$ 的標準常態機率值



林惠玲 陳正倉著 雙葉書報發行 2008

標準常態分配

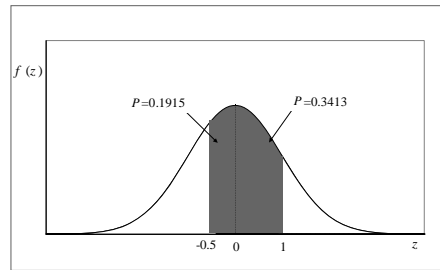
圖9.12 標準常態機率對話方塊



林惠玲 陳正倉著 雙葉書報發行 2008

標準常態分配

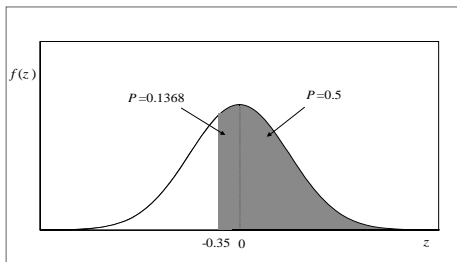
圖9.13 $-0.5 < Z < 1$ 的標準常態機率值



林惠玲 陳正倉著 雙葉書報發行 2008

標準常態分配

圖9.14 $Z > -0.35$ 的標準常態機率值



林惠玲 陳正倉著 雙葉書報發行 2008

標準常態分配

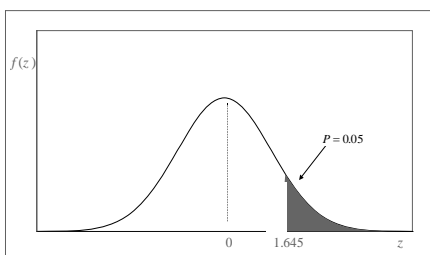
圖9.15 $Z < -0.35$ 的標準常態機率值



林惠玲 陳正倉著 雙葉書報發行 2008

標準常態分配

圖9.16 $Z > z$ 的標準常態機率值



林惠玲 陳正倉著 雙葉書報發行 2008

標準常態分配

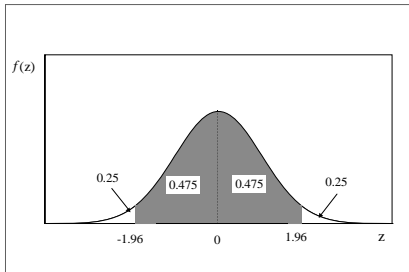
圖9.17 標準常態Z值的對話方塊



林惠玲 陳正倉著 雙葉書報發行 2008

標準常態分配

圖9.18 $-z < Z < z$ 的標準常態機率值



林惠玲 陳正倉著 雙葉書報發行 2008

標準常態分配

○利用常態分配求常態分配的機率

①將隨機變數 X 化為標準隨機變數 Z 。同時將 a 值與 b 值標準化：

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}, a' = \frac{a - \mu}{\sigma}, b' = \frac{b - \mu}{\sigma}$$

②其次，將 Z, a', b' 代入 $P(a < X < b)$ ，即

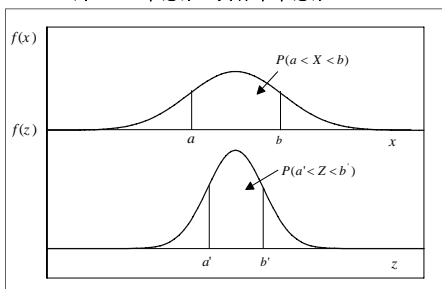
$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{b - \mu}{\sigma}\right) = P(a' < Z < b')$$

③依照查標準常態分配機率值表的方法查表，即可求得機率值。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書報發行 2008

標準常態分配

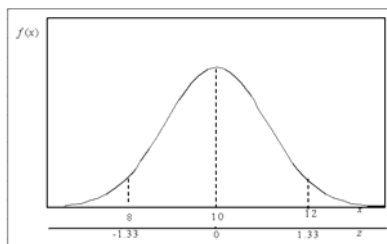
圖9.19 常態分配與標準常態分配



林惠玲 陳正倉著 雙葉書報發行 2008

標準常態分配

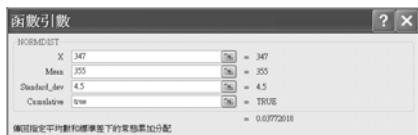
圖9.20 $8 < X < 12$ 的機率



林惠玲 陳正倉著 雙葉書報發行 2008

標準常態分配

圖9.21 常態分配機率值對話方塊



林惠玲 陳正倉著 雙葉書報發行 2008

標準常態分配

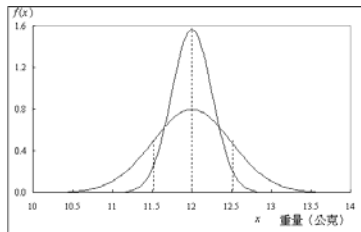
圖9.22 常態分配機率值對話方塊



林惠玲 陳正倉著 雙葉書報發行 2008

標準常態分配

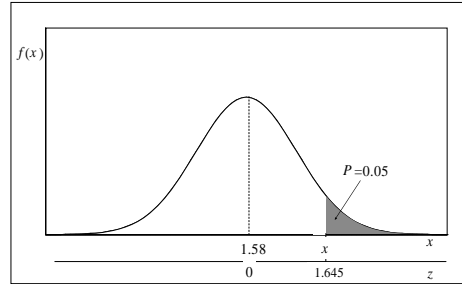
圖9.23 即溶咖啡包重量的常態分配



林惠玲 陳正倉著 雙葉書報發行 2008

標準常態分配

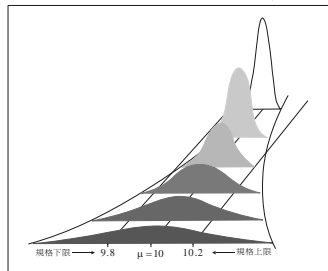
圖9.24 雞肉餐的標準常態分配



林惠玲 陳正倉著 雙葉書報發行 2008

標準常態分配

圖9.24 產品上下限與標準差



林惠玲 陳正倉著 雙葉書報發行 2008

標準常態分配

表9.3 常態分佈曲線之標準差區域或機率

	\bar{x} 在此區域內之機率	\bar{x} 在此區域外之機率
$\mu \pm 1\sigma$	68.27%	31.73% (317,300ppm)
$\mu \pm 2\sigma$	95.45%	4.55% (45,500ppm)
$\mu \pm 3\sigma$	99.73%	0.27% (2,700ppm)
$\mu \pm 4\sigma$	99.9937%	0.0063% (63ppm)
$\mu \pm 5\sigma$	99.999943%	0.000057% (0.57ppm)
$\mu \pm 6\sigma$	99.9999998%	0.0000002% (0.002ppm)

林惠玲 陳正倉著 雙葉書報發行 2008

標準常態分配

表9.4 二項分配與常態分配

	A	B	C
1	x	二項分配	常態分配
2	0	0.000244	0.000571
3	1	0.002930	0.003571
4	2	0.016113	0.016004
5	3	0.053711	0.051393
6	4	0.120850	0.118255
7	5	0.193359	0.194970
8	6	0.225586	0.230329
9	7	0.193359	0.194970
10	8	0.120850	0.118255
11	9	0.053711	0.051393
12	10	0.016113	0.016004
13	11	0.002930	0.003571
14	12	0.000244	0.000571

林惠玲 陳正倉著 雙葉書報發行 2008

二項分配與常態分配

圖9.26 二項機率分配

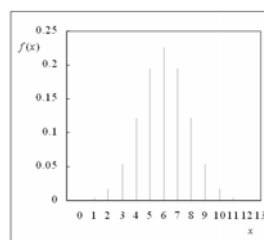
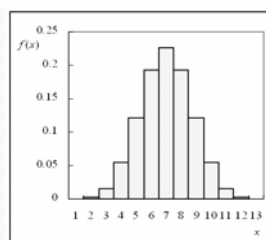


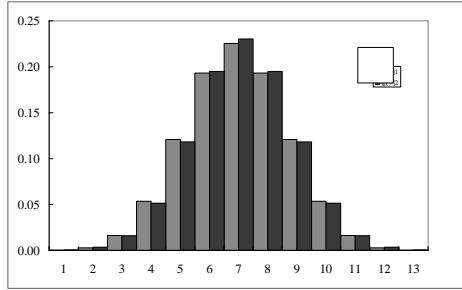
圖9.27 二項機率分配直方圖



林惠玲 陳正倉著 雙葉書報發行 2008

Excel的使用

圖9.28 二項分配與常態分配



林惠玲 陳正金著 雙葉書報發行 2008