

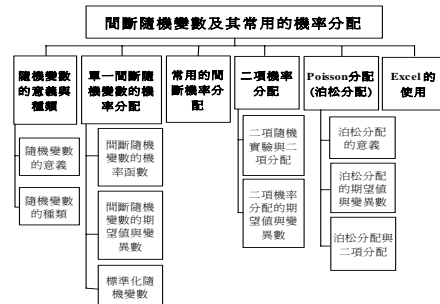
8 間斷隨機變數及其常用的機率分配

○ 學習目的

1. 瞭解隨機變數的意義及其機率分配。
2. 區分間斷隨機變數與連續隨機變數。
3. 計算間斷隨機變數的期望值、變異數及標準差。
4. 熟悉二項分配意義與特性，及其在日常生活上的應用。
5. 瞭解泊松分配的意義與特性，及其在日常生活上的應用。
6. 比較泊松分配與二項分配。
7. 利用 Excel 求算各個分配並繪製圖形。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2008

本章結構



林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2008

隨機變數的意義與種類

○ 隨機變數的意義

隨機變數是隨機實驗中對應樣本點的實數值函數。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2008

隨機變數的意義與種類

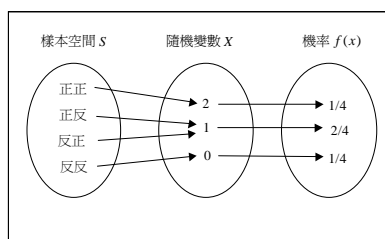
表8.1 投擲銅板的隨機實驗

樣本點 ω	正面的個數 (x) ω	相對次數 (機率) ω
(反 , 反) ω	0 ω	1/4 = 0.25 ω
(正 , 反) (反 , 正) ω	1 ω	2/4 = 0.50 ω
(正 , 正) ω	2 ω	1/4 = 0.25 ω
$N = 4$ ω	ω	1.00 ω

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2008

隨機變數的意義與種類

圖8.1 隨機變數



林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2008

隨機變數的意義與種類

表8.2 台灣人到中國大陸的次數

赴中國大陸次數 X	相對次數 (%)
0	10.2
1	35.8
2	33.5
3 及以上	20.5

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2008

隨機變數的意義與種類

○ 隨機變數的種類

間斷隨機變數

隨機變數的變量其個數是有限的，或個數是無限但可數的稱為間斷或不連續隨機變數。

連續隨機變數

隨機變數的變量其個數為無限且不可數的稱為連續隨機變數。

隨機變數的意義與種類

表8.3 間斷隨機變數

隨機實驗	隨機變數	隨機變數 x 可能的值
1 枚銅板擲 2 次	出現正面的次數	0, 1, 2
抽取 10 個蘋果檢查其品質	不良品的個數	0, 1, 2, ..., 10
購買電扇顧客的性別	性別	0 為男性, 1 為女性
出售的皮包數	銷售量	0, 1, 2, ...

隨機變數的意義與種類

表8.4 連續隨機變數

隨機實驗	隨機變數	隨機變數 x 可能的值
觀察醫院病人候診時間	等候時間	$x \geq 0$
抽取 1 家電腦廠的年銷售收入	銷售收入	$x \geq 0$
抽取 1 個成年男性的身高	身高	$150 \leq x \leq 200$
抽取 1.250ml 瓶裝汽水	汽水容量 ml	$0 \leq x \leq 1,250$

單一間斷隨機變數的機率分配

○ 間斷隨機變數的機率分配

單一間斷隨機變數的機率分配是表示，間斷隨機變數的各個變量的發生機率(或相對次數)的分布情形。

單一間斷隨機變數的機率分配

表8.5 李小姐的皮包銷售量的次數分配

	A	B
1	每天銷售量	相對次數
2	0	0.05
3	1	0.06
4	2	0.08
5	3	0.16
6	4	0.42
7	5	0.15
8	6	0.06
9	7	0.02
10	合計	1.00

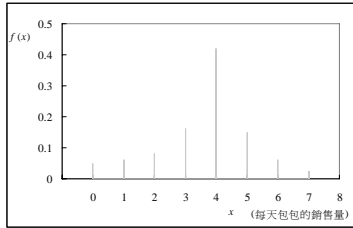
單一間斷隨機變數的機率分配

表8.6 皮包銷售量的機率分配

	A	B	C
1	隨機變量 x	相對次數	機率 $f(x)$
2	0	0.05	0.05
3	1	0.06	0.06
4	2	0.08	0.08
5	3	0.16	0.16
6	4	0.42	0.42
7	5	0.15	0.15
8	6	0.06	0.06
9	7	0.02	0.02
10	合計	$\Sigma = 1.00$	$\Sigma f(x) = 1.00$

單一間斷隨機變數的機率分配

圖8.2 皮包銷售量的機率分配



林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2008

單一間斷隨機變數的機率分配

○ 間斷隨機變數的機率函數

設間斷隨機變數 X ，其變量為 x_1, \dots, x_n ，對應 X 的每一數值有唯一機率與之對應，該機率值表為 $f(X = x_i)$ 或 $f(x_i)$ ，並滿足下列兩個條件：

① $0 \leq f(x_i) \leq 1$

② $\sum_{i=1}^n f(x_i) = 1$

則 $f(x)$ 為 X 之機率函數或稱機率分配。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2008

單一間斷隨機變數的機率分配

○ 期望值

期望值是指，如果我們長期的進行多次的實驗，預期會發生或觀察得到的數值。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2008

單一間斷隨機變數的機率分配

○ 間斷隨機變數的期望值

$$E(X) = \sum x_i f(x_i) = \mu$$

式中： X 為間斷隨機變數， $f(x_i)$ 為機率函數。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2008

單一間斷隨機變數的機率分配

表8.7 李小姐每天皮包銷售量的機率分配

	A	B	C
1	x 隨機變量	$f(x)$ 機率函數	$xf(x)$
2	0	0.05	0
3	1	0.06	0.06
4	2	0.08	0.16
5	3	0.16	0.48
6	4	0.42	1.68
7	5	0.15	0.75
8	6	0.06	0.36
9	7	0.02	0.14
10	合計	$\Sigma = 1.00$	$\Sigma xf(x) = 3.63$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2008

單一間斷隨機變數的機率分配

○ 間斷隨機變數的變異數

$$V(X) = \sum (x_i - \mu)^2 f(x_i)$$

或

$$V(X) = E[(X - \mu)^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$$

○ 間斷隨機變數的標準差

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\sum (x_i - \mu)^2 f(x_i)}$$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2008

單一間斷隨機變數的機率分配

表8.8 每天皮包銷售量的變異數

A	B	C	D	E
x	$f(x)$	$x f(x)$	x^2	$x^2 f(x)$
0	0.05	0	0	0
1	0.06	0.06	1	0.06
2	0.08	0.16	4	0.32
3	0.16	0.48	9	1.44
4	0.42	1.68	16	6.72
5	0.15	0.75	25	3.75
6	0.06	0.36	36	2.16
7	0.02	0.14	49	0.98
合計	$\Sigma = 1.00$	$\Sigma x f(x) = 3.63$		$\Sigma x^2 f(x) = 15.43$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2008

單一間斷隨機變數的機率分配

○ 標準化變數(Z變數)

設 X 為一隨機變數，其平均數為 μ ，變異數為 σ^2 ，令

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

則 Z 為一標準化變數。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2008

單一間斷隨機變數的機率分配

表8.9 每樂透彩的期望值

A	B	C	D	E	F
獎項	中獎機率	預期中獎注數	獎金	每注獎金	每注期望值
1 頭獎	0.000000362	2.897835715	63377706.37	21870703.73	7.9222
3 貳獎	0.000002173	17.38701429	19500832.73	1121574.55	2.4376
4 參獎	0.000069548	556.3844573	24376040.91	43811.50586	3.0470
5 肆獎	0.002694987	21559.89772	55252359.4	2562.737547	6.9065
6 普獎	0.035933163	287465.3029	57493060.59	200	7.1866
合計			220000000		27.50

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2008

單一間斷隨機變數的機率分配

表8.10 標準化隨機變數表

隨機變數 X	標準化變數 $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 3.63}{1.5}$
0σ	-2.420σ
1σ	-1.753σ
2σ	-1.087σ
3σ	-0.420σ
4σ	0.247σ
5σ	0.913σ
6σ	1.580σ
7σ	2.247σ

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2008

單一間斷隨機變數的機率分配

圖8.3 標準化對話方塊



林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2008

常用的間斷機率分配

○ 標準化變數(Z變數)

常用的間斷隨機變數的機率分配包括：二項機率分配 (binomial probability distribution)、超幾何機率分配 (hypergeometric probability distribution)、泊松機率分配 (Poisson probability distribution) 等。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2008

二項機率分配

○ **二項隨機實驗**

隨機實驗都包含 n 個獨立相同的試行 (trial)，每次試行只有兩種可能結果，不是成功，就是失敗。每次試行結果出現的機率都相同，此種實驗我們稱為二項隨機實驗 (binomial random experiment)。

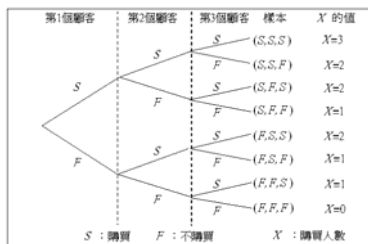
二項機率分配

○ **二項隨機實驗的特性：**

- ① 實驗中包含 n 次相同的試行
- ② 每一次試行只有二種互斥的可能結果，不是成功 (表示為 S)，就是失敗 (表示為 F)。
- ③ 成功的機率為 $P(S) = p$ ，失敗的機率為 $P(F) = 1 - p$ (或表為 q)，且每次試行的機率均相同。
- ④ 每一次試行是獨立的
- ⑤ 隨機變數定義為 n 次試行中成功的次數

二項機率分配

圖 8.4 二項隨機實驗的樹枝圖



二項機率分配

表 8.11 拜訪 3 個顧客 2 個會購買的機率

2 個顧客購買。	機率。
SSF	$p^2q = (0.2)^2(0.8) = 0.032$
SFS	$pqp = (0.2)(0.8)(0.2) = 0.032$
FSS	$qpq = (0.8)(0.2)(0.8) = 0.032$

二項機率分配

○ **二項機率分配的意義**

設 X 為一隨機變數，若 $f(x)$ 為：

$$f(x) = C_n^x p^x q^{n-x} \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

則 $f(x)$ 為二項機率分配。式中： $C_n^x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$ ， n ：

試行次數， x ：成功的次數， p ：成功的機率， q ：失敗的機率 $= 1 - p$

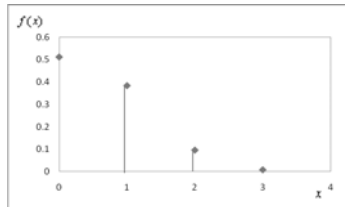
二項機率分配

表 8.12 二項分配機率值

	A	B
1	x	$f(x)$
2	0	0.512
3	1	0.384
4	2	0.096
5	3	0.008

二項機率分配

圖8.5 二項分配機率圖



林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2008

二項機率分配

圖8.6 二項分配對話方塊圖



林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2008

二項機率分配

○ 二項分配的期望值

$$E(X) = np$$

○ 二項分配的變異數

$$V(X) = npq$$

○ 二項分配的標準差

$$\sigma = \sqrt{npq}$$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2008

二項機率分配

圖8.7 右偏分配

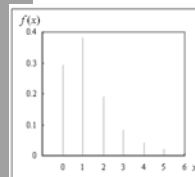


圖8.8 對稱分配

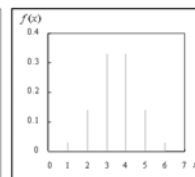
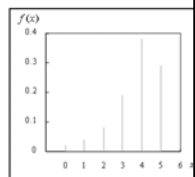


圖8.9 左偏分配



林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2008

Poisson(泊松)分配

○ 泊松隨機實驗的個特性：

- ①在一連續區間發生事件的個數，與另一區間發生的個數是獨立的。
- ②在一個連續區間發生事件的期望值（平均數）與區間大小成比例
- ③在很短的區間內事件發生 1 個或不發生

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2008

Poisson(泊松)分配

○ 泊松分配

設已知在一定的區間發生事件A的期望值為 λ ，令X為該區間發生事件的次數，則：

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

此即為泊松分配，其參數為 λ 。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2008

Poisson(泊松)分配

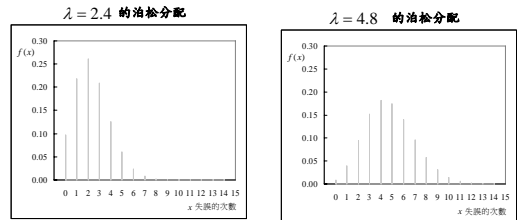
表8.13 $\lambda = 2.4$ 及 $\lambda = 4.8$ 的泊松機率分配

	A	B	C
1	x	f'(x)	
2		$\lambda = 2.4$	$\lambda = 4.8$
3	0	0.090718	0.008230
4	1	0.217723	0.039503
5	2	0.261268	0.094807
6	3	0.209014	0.151691
7	4	0.125408	0.182029
8	5	0.060196	0.174748
9	6	0.024078	0.139798
10	7	0.008255	0.095862
11	8	0.002477	0.057517
12	9	0.000660	0.030676
13	10	0.000159	0.014724
14	11	0.000035	0.006425
15	12	0.000007	0.002570
16	13	0.000001	0.000949
17	14	0.000000	0.000325

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2008

Poisson(泊松)分配

圖8.10 電腦處方失誤筆數的機率分配



林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2008

Poisson(泊松)分配

- 泊松分配的期望值

$$E(X) = \lambda$$

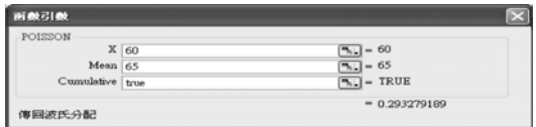
- 泊松分配的變異數

$$V(X) = \lambda$$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2008

Poisson(泊松)分配

圖6.14 泊松分配對話方塊



林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2008

泊松分配與二項分配

表8.14 二項分配與泊松分配

	A	B	C	D
1	x	二項分配	泊松分配	B-C
2	0	2.65614E-05	4.53999E-05	-1.88385E-05
3	1	0.000295127	0.000453999	-0.000158873
4	2	0.001623197	0.002269996	-0.0006468
5	3	0.005891602	0.007566655	-0.001675052
6	4	0.015874596	0.018916637	-0.003042042
7	5	0.033865804	0.037833275	-0.003967471
8	6	0.059578729	0.063055458	-0.003476729
9	7	0.088895246	0.090079226	-0.001183979
10	8	0.114823027	0.112599032	0.002223994
11	9	0.130416277	0.125110036	0.005306241
12	10	0.131865347	0.125110036	0.006755311

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2008

泊松分配與二項分配

圖8.11 二項分配

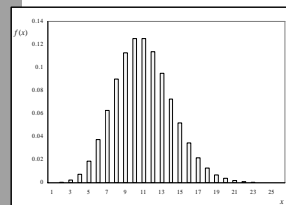
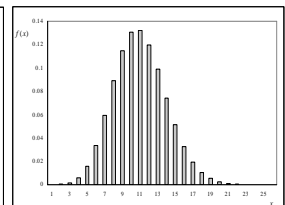


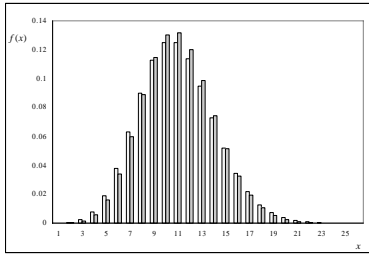
圖8.12 泊松分配



林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2008

泊松分配與二項分配

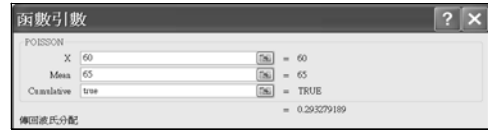
圖 8.13 二項分配與泊松分配



林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2008

泊松分配

圖 8.14 泊松分配的對話方塊



林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2008

Excel的使用

圖 8.15 泊插入函數對話方塊



林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2008