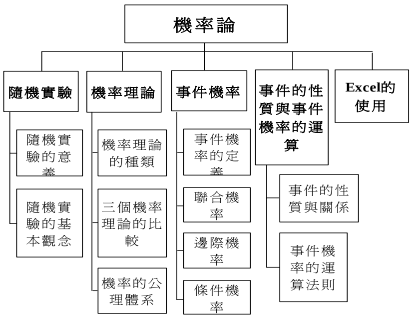
7 機率論

- **學習目的**
  1.瞭解機率的定義
  2.瞭解機率的基本觀念如隨機實驗，實驗結果，事件，樣本空間等。
  3.熟悉古典的機率理論、客觀的機率理論及主觀的機率理論。
  4.熟悉聯合機率、邊際機率及條件機率的定義及其應用。
  5.學習獨立、不獨立與互斥事件間的相互關係。

本章結構



隨機實驗

- **隨機實驗的意義**

隨機實驗是一種過程(process)，是一種不能確定預知會發生何種結果的實驗方式。在實驗前已知所有可能出現的結果，而實驗後的結果爲所有可能的結果之一，但實驗前並未能正確的、肯定的預知它是何種結果。隨機實驗可重複進行，而經過長期重複實驗，出現的結果會遵循某一些統計規則（成現有規則的分布）。

隨機實驗

表7.1 隨機實驗、出象與樣本空間

隨機實驗	出象	樣本空間
抽取一個產品做檢驗	良品，不良品	$S=\{$良品, 不良品$\}$
丟一個骰子 1 次	1,2,3,4,5,6	$S=\{1,2,3,4,5,6\}$
抽查經濟學成績	0~100 分	$S=\{0\sim100$分$\}$
衡量初生嬰兒的體重	1,500g~5,000g	$S=\{1{,}500g\sim5{,}000g\}$

隨機實驗

- **隨機**

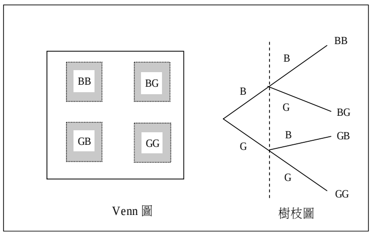
隨機是指一個現象事先無法預知是否發生，但在長期多次重複實驗之後，該現象的發生會出現有規則的型態。

隨機實驗的基本觀念

- **基本出象**
  隨機實驗的每個可能的結果稱爲基本出象，又稱爲樣本點。
- **樣本空間**
  一個隨機實驗中，所有可能出象的集合稱爲樣本空間。通常以英文大寫字母*S*表示之。

隨機實驗的基本觀念

圖7.1 兩個小孩家庭的樣本空間



隨機實驗的基本觀念

- **事件**

  樣本空間的部份集合稱爲事件。

- **簡單事件**

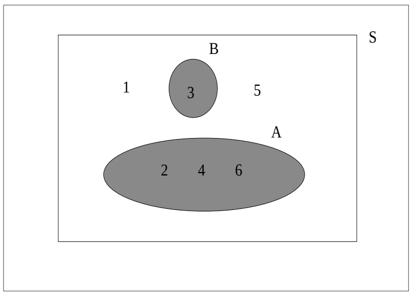
  事件只包含一個基本出象者稱爲簡單事件。

- **複合事件**

  事件包含二個或二個以上基本出象者稱爲複合事件。

隨機實驗的基本觀念

圖7.2 簡單事件與複合事件



隨機實驗的基本觀念

- **乘數定理**

  設一隨機實驗包含 k 個實驗 $E_1, E_2, \cdots, E_k$，若每一實驗 E_i 有 n_i 種結果，$i=1,2,\cdots,k$，則該隨機實驗有 $n_1\times n_2\times\cdots\times n_k$ 種可能結果。

- **排列**

$$P_r^n=\frac{n!}{(n-r)!}=n\times(n-1)\times\cdots\times(n-r+1)$$

- **組合**

$$C_r^n=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-r+1}{r!}$$

機率理論

- **古典的機率理論**

$$P(E)=\frac{1}{N}$$

- **客觀的機率理論**

$$P(E)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(E)}{n}$$

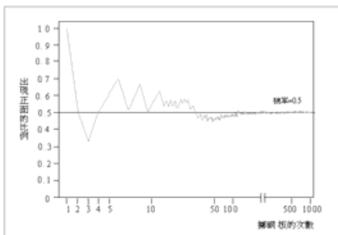
式中：$n(E)$ 表示事件E出現的次數，n表隨機實驗的總次數。

- **主觀的機率理論**

$P(E)=$[對事件E發生的信心]

機率理論

圖7.3 投擲銅板出現正面的機率



機率理論

- **大數法則**

  若某事件有既定的機率，而我們不斷的進行相同的實驗，則該事件發生的次數比例會越來越接近這個既定的機率。

機率的公理體系

- **公理一**

  $0 \le P(E_i) \le 1$，表示任一事件E_i若可能發生，則其機率大於0小於1。若事件不發生，則其機率等於0。若事件一定發生，則機率等於1。

- **公理二**

  $P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_n)$，$E_1, E_2, \cdots, E_n$互斥，表示若有$n$個互斥事件$E_1, E_2, \cdots, E_n$，則$E_1$發生或$E_2$發生或$E_n$發生的機率爲其個別機率的和。

- **公理三**

  $P(S) = 1$，表示樣本空間中所有事件均發生的機率總合等於1。

事件機率

- **事件機率的定義**

  設事件A定義於隨機實驗的樣本空間，其發生之機率$P(A)$爲事件A之基本出象的機率總和，即$P(A) = \sum P(E_i)$，$E_i \in A$。

事件機率

- **聯合機率的定義**

  二個或二個以上事件同時發生的機率稱爲聯合機率。

事件機率

表7.2 二事件的聯合（聯合次數分配）

$A \backslash B$	B_1	B_2
A_1	$A_1 \cap B_1$	$A_1 \cap B_2$
A_2	$A_2 \cap B_1$	$A_2 \cap B_2$

事件機率

表7.3 聯合機率分配表

$A \backslash B$	B_1	B_2
A_1	$P(A_1 \cap B_1)$	$P(A_1 \cap B_2)$
A_2	$P(A_2 \cap B_1)$	$P(A_2 \cap B_2)$

事件機率

表7.4 汽車墊片的品質與模具狀況分析

		產品（B）		合 計
		良品（B_1）	瑕疵品（B_2）	
模具（A）	狀況佳（A_1）	320	80	400
	狀況差（A_2）	14	36	50
合 計		334	116	450

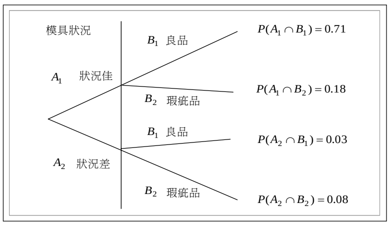
事件機率

表7.5 汽車墊片的品質與模具狀況的機率表

		產品		$P(A_i)$
		良品（B_1）	瑕疵品（B_2）	
模具	狀況佳（A_1）	$P(A_1 \cap B_1) = 0.71$	$P(A_1 \cap B_2) = 0.18$	$P(A_1) = 0.89$
	狀況差（A_2）	$P(A_2 \cap B_1) = 0.03$	$P(A_2 \cap B_2) = 0.08$	$P(A_2) = 0.11$
$P(B_i)$		$P(B_1) = 0.74$	$P(B_2) = 0.26$	1.00

事件機率

圖7.4 汽車墊片的品質與模具狀況的樹枝圖



事件機率

- **邊際機率的定義**

  在有二個或二個以上類別的樣本空間中，若僅考慮某一類別個別發生的機率者稱爲邊際機率。

- **條件機率的定義**

  令A、B爲定義於樣本空間的事件，已知發生事件B之後再發生事件A的機率，稱爲事件A的條件機率。

事件的性質與事件機率的運算

- **獨立事件**

  獨立事件係指一事件的發生不影響其他事件發生的機率。

- **兩事件獨立**

  若A、B兩事件合乎於下列任一條件，則A、B互爲獨立。

  ① $P(A|B) = P(A)$ ② $P(B|A) = P(B)$ ③ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

事件的性質與事件機率的運算

- **相依事件**

  相依事件係指一事件的發生影響其他事件發生的機率。

- **互斥事件**

  如果事件沒有共同的元素(樣本點)，則稱爲互斥事件。

事件的性質與事件機率的運算

- 加法定理
  兩事件的聯集
  $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
  如果事件A與事件B互斥，則
  $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$
- 乘法定理
  二事件的交集
  $P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A|B)$
  如果A、B獨立($P(A|B)=P(A)$)，則
  $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$
- 分割定理(條件機率的情形)
  若$A_1,\cdots,A_k$為分割集合，B為一事件，則$P(B)=\sum_{i=1}^{k}P(B\cap A_i)$，
  且由$P(B\cap A_i)=P(A_i)\cdot P(B|A_i)$，故
  $P(B)=\sum_{i=1}^{k}P(B\cap A_i)==\sum_{i=1}^{k}P(A_i)\cdot P(B|A_i)$

事件的性質與事件機率的運算

- 分割定理(條件機率的情形)

若$A_1,\cdots,A_k$為分割集合，B為一事件，則$P(B)=\sum_{i=1}^{k}P(B\cap A_i)$，

且由$P(B\cap A_i)=P(A_i)\cdot P(B|A_i)$，故

$$P(B)=\sum_{i=1}^{k}P(B\cap A_i)==\sum_{i=1}^{k}P(A_i)\cdot P(B|A_i)$$

事件的性質與事件機率的運算

表7.6 高中應屆畢業生申請參加甄試的結果

		甄試結果		合計
		錄取（B_1）	不錄取（B_2）	
性別	男生（A_1）	175	225	400
	女生（A_2）	100	200	300
合計		275	425	700

事件的性質與事件機率的運算

表7.7 電機學院甄試結果

	男	女
錄取	150	50
不錄取	150	50
合計	300	100

表7.8 文學院甄試結果

	男	女
錄取	25	50
不錄取	75	150
合計	100	200

Excel的使用

圖7.5 求算組合的對話方塊