

## 第7章 連續隨機變數及其常用的機率分配

### 學習目的

1. 熟悉並計算連續機率分配機率函數的期望值與變異數。
2. 瞭解常態分配的意義、特質與重要性。
3. 瞭解標準常態分配的意義、性質與利用標準常態分配求算機率。
4. 瞭解均等分配、指數分配的意義及性質並計算其期望值與變異數。
5. 比較超幾何分配、二項分配、泊松分配與常態分配。
6. 利用Excel求算各個連續機率分配並繪製圖形。

含課本重點整理，惟仍應研讀課本之詳細內容

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

## 第7章 連續隨機變數及其常用的機率分配

### 連續隨機變數的機率分配

#### ○ 連續隨機變數的機率分配

單一連續隨機變數的機率分配是表示，連續隨機變數的任意兩點之間變量的發生機率（或相對次數）的分布情形。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

## 第7章 連續隨機變數及其常用的機率分配

## 連續隨機變數的機率分配

## ○ 連續隨機變數的機率密度函數

設 $X$ 為連續隨機變數，其值為 $a \leq X \leq b$ ，若 $f(x)$ 滿足下列二條件：

$$\textcircled{1} f(x) \geq 0 \quad \textcircled{2} \int_a^b f(x) dx = 1$$

則 $f(x)$ 為 $X$ 的機率密度函數(probability density function)，簡稱pdf。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

## 第7章 連續隨機變數及其常用的機率分配

## 連續隨機變數的機率分配

## ○ 累加機率函數

$$F(X = x) = P(X \leq x) = \int_a^x f(x) dx$$

## ○ 期望值

$$E(X) = \int_a^b xf(x) dx = \mu \quad (a \leq X \leq b)$$

## ○ 變異數

$$V(X) = \sigma_X^2 = \int_a^b (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx$$

## ○ 標準差

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

## 第7章 連續隨機變數及其常用的機率分配

## 常態分配

## ○ 常態分配的定義

設 $X$ 為連續隨機變數，若其機率密度函數為：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty$$

式中：  $-\infty < \mu < \infty$  ,  $\sigma > 0$  ,  $\pi = 3.1416$  ,  $e = 2.7183$  。

則稱此 $f(x)$ 為常態分配。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

## 第7章 連續隨機變數及其常用的機率分配

## 常態分配

## ○ 常態分配的特質

- ① 常態分配  $f(x)$  為以  $\mu$  為中心的對稱分配。
- ② 常態分配曲線下面的面積總和等於1。
- ③ 常態分配  $f(x)$  在  $X = \mu \pm \sigma$  時有一轉折點。
- ④ 常態分配曲線的兩尾無限延伸。
- ⑤ 常態分配的機率範圍可分為三種情況。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

## 第7章 連續隨機變數及其常用的機率分配

## 常態分配

## ○常態分配的平均數

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \mu$$

## ○變異數

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2$$

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

## 第7章 連續隨機變數及其常用的機率分配

## 常態分配

## ○常態分配的機率範圍

- ① 常態隨機變數的值落在離開平均數 1 個標準差等距的範圍(即  $\mu \pm \sigma$ )之機率為：

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.6826$$

- ② 常態隨機變數的值落在離開平均數 2 個標準差等距的範圍(即  $\mu \pm 2\sigma$ )之機率為：

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.9544$$

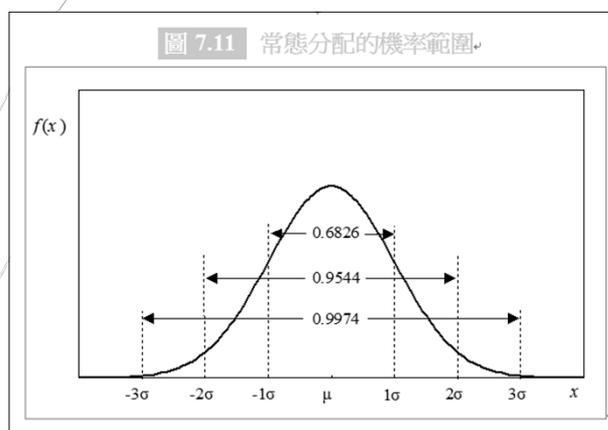
- ③ 常態隨機變數的值落在離開平均數 3 個標準差等距的範圍(即  $\mu \pm 3\sigma$ )之機率為：

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0.9974$$

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

## 第7章 連續隨機變數及其常用的機率分配

## 常態分配



現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

## 第7章 連續隨機變數及其常用的機率分配

## 常態分配

## ○ 常態分配的重要性

- ① 常態分配可做為在統計推論程序中的基本模式
- ② 常態分配可進行許多統計推論
- ③ 常態分配構成大樣本推論統計的基礎
- ④ 間斷機率分配在某些條件下可利用常態分配求其近似值

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

## 第7章 連續隨機變數及其常用的機率分配

## 常態分配

## ○ 常態分配的加法定理

定理1 設  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，若  $W = a + bX$  則

$$W \sim N(a + b\mu, b^2\sigma^2)$$

定理2 設  $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ ， $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$  且  $X$ 、 $Y$  獨立，若

$$W = aX + bY$$

則

$$W \sim N(a\mu_x + b\mu_y, a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2)$$

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

## 第7章 連續隨機變數及其常用的機率分配

## 標準常態分配

## ○ 標準常態分配

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Z^2}{2}}$$

式中  $Z = (X - \mu) / \sigma$  標準常態變數。標準常態分配其平均數為

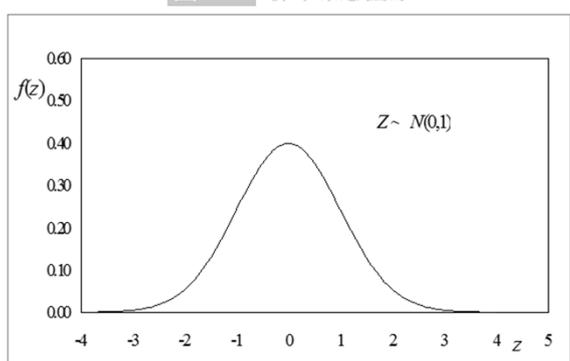
0，變異數為1。一般以  $Z \sim N(0, 1)$  來表示。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

## 第7章 連續隨機變數及其常用的機率分配

## 標準常態分配

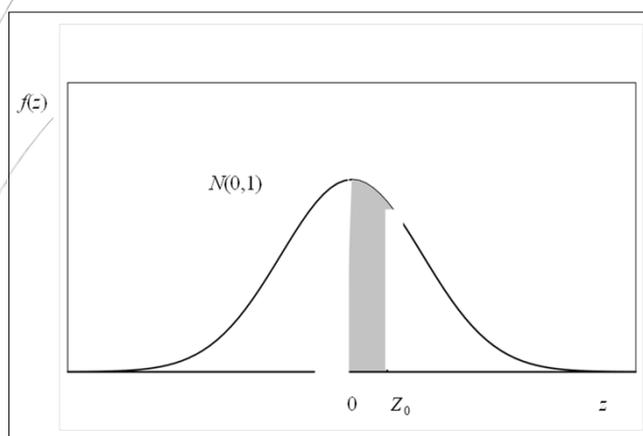
圖 7.12 標準常態曲線



現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

## 第7章 連續隨機變數及其常用的機率分配

## 標準常態分配

圖7.13 標準常態分配機率(0與 $z_0$ 間)

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

## 第7章 連續隨機變數及其常用的機率分配

## 標準常態分配

## ○標準常態分配的特性

- ① 標準常態分配具有常態分配的特質，唯其平均數  $\mu_Z = 0$ ，變異數  $\sigma_Z^2 = 1$ ，標準差  $\sigma_Z = 1$ ，它是常態分配的特殊例子。
- ② 標準常態分配的任何值域的機率可查標準常態機率值表而獲得。標準常態分配機率值表中的機率值代表  $P(0 < Z < z_0)$ ，它表示標準常態變數  $Z = 0$  與任何已知正的  $Z$  值  $z_0$  間的機率。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

## 第7章 連續隨機變數及其常用的機率分配

## 標準常態分配

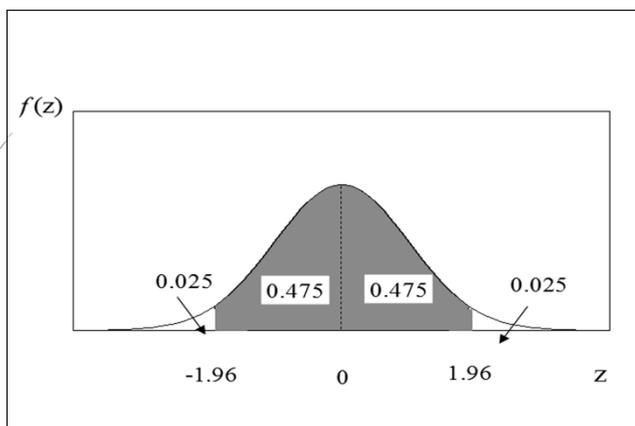
表 7.2 標準常態機率分配表

Z	Z 的第二位小數									
	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

## 第7章 連續隨機變數及其常用的機率分配

## 標準常態分配

圖7.21  $-z < Z < z$  的標準常態機率值

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

## 第7章 連續隨機變數及其常用的機率分配

## 標準常態分配

## ○利用常態分配求常態分配的機率

- ①將隨機變數 $X$ 化為標準隨機變數 $Z$ 。同時將 $a$  值與 $b$  值標準化：

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}, \quad a' = \frac{a - \mu}{\sigma}, \quad b' = \frac{b - \mu}{\sigma}$$

- ②其次，將 $Z$ ， $a'$ ， $b'$  代入 $P(a < X < b)$ ，即

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{b - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P(a' < Z < b') \end{aligned}$$

- ③依照查標準常態分配機率值表的方法查表，即可求得機率值。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

## 第7章 連續隨機變數及其常用的機率分配

## 均等分配

## ○ 機率密度函數

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq X \leq b \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

## 第7章 連續隨機變數及其常用的機率分配

## 均等分配

## ○ 累加機率函數

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{x-a}{b-a}$$

## ○ 期望值

$$E(X) = \frac{b+a}{2}$$

## ○ 變異數

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

## 第7章 連續隨機變數及其常用的機率分配

## 指數分配

## ○ 指數分配

若 $X$ 為連續的隨機變數，其機率密度函數為：

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x \geq 0, \lambda > 0$$

則 $f(x)$ 為指數分配。式中： $\lambda$ 為單位時間事件發生的平均數。

## ○ 期望值

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

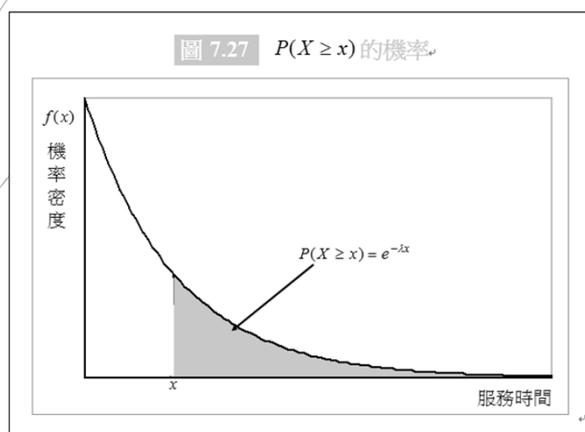
## ○ 變異數

$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

## 第7章 連續隨機變數及其常用的機率分配

## 指數分配

圖 7.27  $P(X \geq x)$  的機率。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

## 第7章 連續隨機變數及其常用的機率分配

## 指數分配

## ○ 期望值

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

## ○ 變異數

$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

## 第7章 連續隨機變數及其常用的機率分配

## 二項分配與常態分配

圖 7.33 不連續的機率分配

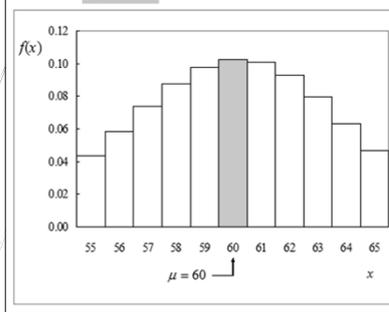
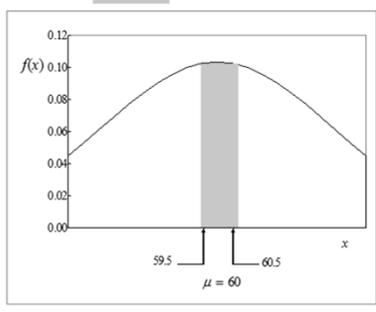


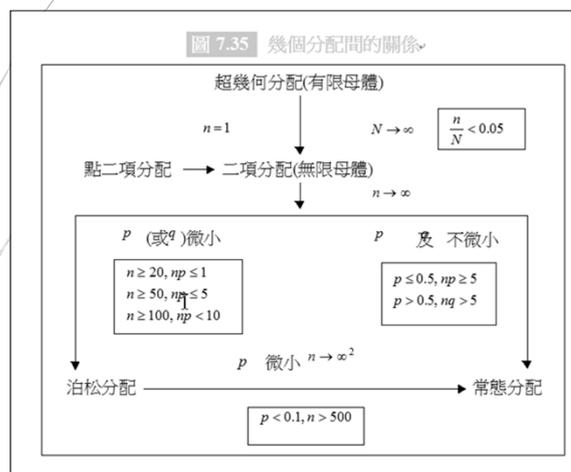
圖 7.34 連續機率分配



現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

## 第7章 連續隨機變數及其常用的機率分配

## 二項分配與常態分配



現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

## 第7章 連續隨機變數及其常用的機率分配

7.1 試求下列 Z 分配的機率。

- ①  $P(-1 \leq Z \leq 1)$ 。②  $P(Z = 1)$ 。③  $P(-2.16 < Z \leq 0.55)$ 。  
 ④  $P(-0.42 < Z < 1.96)$ 。⑤  $P(Z \geq -2.33)$ 。⑥  $P(Z < 2.33)$ 。

7.3 設  $X$  為一常態分配， $\mu = 50$ ， $\sigma = 3$ ，求  $x_0$  值。

- ①  $P(x \leq x_0) = 0.8413$ 。②  $P(x > x_0) = 0.025$ 。③  $P(x > x_0) = 0.95$ 。  
 ④  $P(41 < x \leq x_0) = 0.8630$ 。

7.7 某一統計學考試成績的分配為常態分配，平均數為 80 分，標準差為 10 分；今將分數由高而低區分為 A、B、C、D、E、F 五個等級，最後的 F 為不及格。試問：

- ① 若有 5% 的學生得到 F，則及格分數為多少？  
 ② 若前 5% 的學生得到 A，接著 25% 的學生得到 B，則 B 級最低分為幾分？（答案請四捨五入）。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

## 第7章 連續隨機變數及其常用的機率分配

- 7.10 假定根據以往檢驗結果知某種產品中約有 20% 不合格，現由該項產品中隨機抽取 500 個加以檢驗，試求：
- ① 其中有 90 個或 90 個以上不合格的機率。
  - ② 其中恰有 90 個不合格的機率（請以常態分配求之）。
- 7.15 某公司平均每 20 天接到 6 筆訂單，若接單的間隔天數為一指數分配，試問：
- ① 3 天內接到下一筆訂單的機率為何？
  - ② 至少需要 5 天才能接到下一筆訂單的機率為何？