

## 第6章 間斷隨機變數及其常用的機率分配

### 學習目的

1. 定義或了解隨機變數的意義及其機率分配。
2. 區分間斷隨機變數與連續隨機變數。
3. 計算間斷隨機變數的期望值、變異數及標準差。
4. 熟悉二項分配意義與特性，及其在日常生活上的應用。
5. 了解泊松分配的意義與特性，及其在日常生活上的應用。
6. 了解超幾何分配的意義與特性，及其在日常生活上的應用。
7. 比較泊松分配與二項分配。
8. 利用Excel求算各個分配並繪製圖形。

含課本重點整理，惟仍應研讀課本之詳細內容

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

## 第6章 間斷隨機變數及其常用的機率分配

### 隨機變數的意義與種類

#### ○ 隨機變數的意義

隨機變數是隨機實驗中對應樣本點的實數值函數。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

## 第6章 間斷隨機變數及其常用的機率分配

### 隨機變數的意義與種類

#### ○ 隨機變數的種類

##### 間斷隨機變數

隨機變數的變量其個數是有限的，或個數是無限但可數的稱為間斷或不連續隨機變數。

##### 連續隨機變數

隨機變數的變量其個數為無限且不可數的稱為連續隨機變數。

## 第6章 間斷隨機變數及其常用的機率分配

### 單一間斷隨機變數的機率分配

#### ○ 間斷隨機變數的機率分配

單一間斷隨機變數的機率分配是表示，間斷隨機變數的各個變量的發生機率(或相對次數)的分布情形。

## 第6章 間斷隨機變數及其常用的機率分配

### 單一間斷隨機變數的機率分配

#### ○ 間斷隨機變數的機率函數

設間斷隨機變數 $X$ ，其變量為 $x_1, \dots, x_n$ ，對應 $X$ 的每一數值有唯一機率與之對應，該機率值表為 $f(X = x_i)$ 或 $f(x_i)$ ，並滿足下列兩個條件：

$$\textcircled{1} 0 \leq f(x_i) \leq 1$$

$$\textcircled{2} \sum_{i=1}^n f(x_i) = 1$$

則 $f(x)$ 為 $X$ 之機率函數或稱機率分配。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

## 第6章 間斷隨機變數及其常用的機率分配

### 單一間斷隨機變數的機率分配

#### ○ 期望值

期望值是指，如果我們不斷的進行多次的實驗，預期會發生或觀察得到的數值或結果。

#### ○ 間斷隨機變數的期望值

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i) = \mu$$

式中： $X$ 為間斷隨機變數， $f(x_i)$ 為機率函數。

## 第6章 間斷隨機變數及其常用的機率分配

## 單一間斷隨機變數的機率分配

## ○ 間斷隨機變數的變異數

$$V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 f(x_i)$$

或

$$V(X) = E[(X - \mu)^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$$

## ○ 間斷隨機變數的標準差

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 f(x_i)}$$

## 第6章 間斷隨機變數及其常用的機率分配

## 單一間斷隨機變數的機率分配

## ○ 隨機變數函數的期望值

設  $X$  為間斷隨機變數，其機率函數為  $f(x)$ 。令  $h(X)$  為  $X$  的函數，則  $h(X)$  的期望值表為  $E[h(X)]$  或  $\mu_{h(x)}$ ：

$$E[h(X)] = \sum_x h(x)f(x)$$

## ○ 隨機變數函數期望值的定理

設  $C$  為常數， $h(X)$  為  $X$  的函數，則

$$\textcircled{1} E(C) = C$$

$$\textcircled{2} E[C \cdot h(X)] = C \cdot E[h(X)]$$

$$\textcircled{3} E[h_1(X) + h_2(X) + \cdots + h_k(X)] = E[h_1(X)] + \cdots + E[h_k(X)]$$

式中： $h_1(X), h_2(X), \dots, h_k(X)$  均為  $X$  的函數。

## 第6章 間斷隨機變數及其常用的機率分配

## 單一間斷隨機變數函數的期望值與變異數

## ○ 線性函數的期望值

$h(X) = a + bX$  的期望值(平均數)為：

$$E(Y) = E(a + bX) = a + bE(X)$$

## ○ 線性函數的變異數

$h(X) = a + bX$  的變異數為：

$$V(Y) = V(a + bX) = V(bX) = b^2V(X)$$

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

## 第6章 間斷隨機變數及其常用的機率分配

## 二項機率分配

## ○ 二項隨機實驗

隨機實驗都包含  $n$  個獨立相同的試行 (trial)，每次試行只有兩種可能結果，不是成功，就是失敗。每次試行結果出現的機率都相同，此種實驗我們稱為二項隨機實驗 (binomial random experiment)。

## 第6章 間斷隨機變數及其常用的機率分配

## 二項機率分配

## ○二項隨機實驗的特性：

- ①實驗中包含 $n$ 次相同的試行
- ②每一次試行只有二種互斥的可能結果，不是成功（表示為 $S$ ），就是失敗（表示為 $F$ ）。
- ③成功的機率為 $P(S)=p$ ，失敗的機率為 $P(F)=1-p$ （或表示為 $q$ ），且每次試行的機率均相同。
- ④每一次試行是獨立的
- ⑤隨機變數定義為 $n$ 次試行中成功的次數

## 第6章 間斷隨機變數及其常用的機率分配

## 二項機率分配

## ○ 二項機率分配

設 $X$ 為一間斷隨機變數，若 $f(x)$ 為：

$$f(x) = C_x^n p^x q^{n-x} \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

則 $f(x)$ 為一二項機率分配。式中： $C_x^n = \frac{n!}{x!(n-x)!}$ ， $n$ ：試行次數， $x$ ：成功的次數， $p$ ：成功的機率， $q$ ：失敗的機率 $=1-p$

## 第6章 間斷隨機變數及其常用的機率分配

## 二項機率分配

## ○ 期望值

$$E(X) = np$$

## ○ 變異數

$$V(X) = npq$$

## ○ 標準差

$$\sigma = \sqrt{npq}$$

## 第6章 間斷隨機變數及其常用的機率分配

## 泊松分配

## ○ 泊松分配

設已知在一定的區間發生事件 $A$ 的期望值為 $\lambda$ ，令 $X$ 為該區間發生事件的次數，則：

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

此即為泊松分配，其參數為 $\lambda$ 。

## 第6章 間斷隨機變數及其常用的機率分配

## 泊松分配

## ○ 期望值

$$E(X) = \lambda$$

## ○ 變異數

$$V(X) = \lambda$$

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

## 第6章 間斷隨機變數及其常用的機率分配

## 超幾何分配

## ○ 超幾何分配

$$f(x) = \frac{C_x^K C_{n-x}^{N-K}}{C_n^N} \quad x = 0, 1, \dots, n \quad x \leq K \quad x \geq K + n - N$$

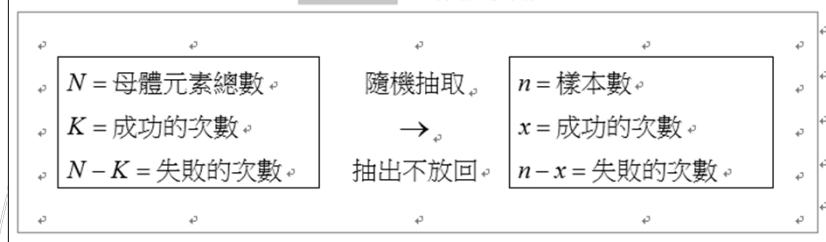
現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015



## 第6章 間斷隨機變數及其常用的機率分配

## 超幾何分配

圖 6.15 超幾何實驗



現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

## 第6章 間斷隨機變數及其常用的機率分配

## 超幾何分配

## ○ 平均數

$$E(X) = n \cdot \frac{K}{N}$$

## ○ 變異數

$$V(X) = n \cdot \frac{K}{N} \cdot \frac{N-K}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

## 第6章 間斷隨機變數及其常用的機率分配

6.1 下列各函數是否符合機率公理：

①  $f(x) = \frac{x-1}{6}$   $x=1,2,3,4$  ,      ②  $f(x) = \frac{x^2+1}{5}$   $x=-1,0,1$   
 ③  $f(x) = \frac{(x-1)^2}{16}$   $x=-2,-1,0,1,2$     ④  $f(x) = \frac{x^2}{2}$   $x=-1,0,1$  .

6.5 設隨機變數  $X$ ，有下列之機率分配：

$x$	0	1	2	3	4
$f(x)$	$P$	$4P$	$1P$	$2P$	$2P$

試求：

①  $P$  值。 ②  $E(X)$ 、 $E(2X)$ 、 $E(15-1.5X)$ 。 ③  $E(X^2)$ 。 ④  $V(X)$ 。

6.8 全校 600 人性向測驗的平均數 75 分，標準差 5 分，試求：

- ① 成績在 65 分與 85 分之間約有若干人？  
 ② 成績在 62.5 分與 87.5 分之間約有若干人？

6.9 郵局每天處理的國際信件中，寄往美、加地區的信件重量的機率分配函數如下（單位：公克）：

信件重量	10	20	30	40	50
機率	0.35	0.25	0.2	0.1	0.1

令  $X$  與  $Y$  分別表示信件的重量與郵資。郵局的計費方式為：第一個 10 公克 15 元，以後每增加 10 公克加 13 元。

- ① 試求  $E(X)$ 、 $E(Y)$ 、 $V(X)$ 、 $V(Y)$ 。  
 ② 利用柴比氏定理求一包含 60% 信件的重量範圍。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

## 第6章 間斷隨機變數及其常用的機率分配

6.10 某校有學生 4,000 人，其中 400 人視力正常，今隨機抽取 20 人。

- ① 其中 10 人視力正常之機率為何？  
 ② 試以二項分配及泊松分配計算機率值。

6.11 一個盒子裡置有黑球 5 個、白球 4 個，自其中連續抽取 4 球，令  $X$  表抽出黑球的個數，試求  $X$  的機率函數。

- ①  $X$  分別呈何種分配？試求  $X$  的機率函數。  
 ②  $P(3 \leq X \leq 5) = ?$  ③  $E(X)$ 、 $V(X)$  為何？

6.13 若新生嬰兒目盲之機率為萬分之一，試問某醫院一年新接生的 6,000 個嬰兒中：① 無一盲目者之機率？② 僅二盲目者之機率？

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015