

## 五、剛性鋪面之應力分析

### D 剛性鋪面之應力分析

#### ◎ Medium Thick Plate Theory (略)

Additional Reading: (略)

Professor Barenberg's CE420 Class Handout

#### D.1 接縫式混凝土路面(JCP)應力分析

資料來源：

交通部台灣區國道新建工程局，“北二高剛性路面建造講習”，第50-63頁，中華民國七十九年。

#### D.2 接縫式混凝土鋪面邊界荷重與撓屈應力分析

資料來源：

Lee, Y. H., and M. I. Darter, "Loading and Curling Stress Models for Concrete Pavement Design," Transportation Research Record 1449, Transportation Research Board, National Research Council, Washington, D.C., 1994, pp. 101-113.

#### D.3 建立鋪面預估模式之新技術

資料來源：

Lee, Y. H., and M. I. Darter, "New Predictive Modeling Techniques for Pavements," Transportation Research Record 1449, Transportation Research Board, National Research Council, Washington, D.C., 1994, pp. 234-245.

## 7. 接縫式混凝土路面 ( JCP ) 應力分析

接縫式混凝土路面分析中，導致路面應力產生之因素如下：

- (a) 外加荷重
- (b) 溫度差異
- (c) 水份變化
- (d) 不均勻路基支承

上述各因素對路面之反應各有不同之影響，部份影響如圖 7.1 所示。

基於上述各種因素，臨界應力及撓度可能發生於混凝土路面中不同位置。如圖 7.2 所示，臨界應力可能發生於角隅(A)、橫向接縫(A')或縱向接縫(B)，亦有可能發生於內部(C)。

在本節中，將介紹兩種最常用之應力分析方法。第一種方法主要將混凝土路面考慮為一無限大之版塊，置於被視為 Winkler 基礎之路基上，其荷重作用於角隅、邊緣或內部。因溫度差異而產生之翹曲 (Warping) 應力亦可用同一方法，以無限及有限大之版塊加以分析。Westergaard [ 11 - 13 ] 最先使用此種方法決定波特蘭水泥混凝土之臨界應力，其結果為 Picott 及 Ray [ 14 ] 所引用而發展出影響圖，且被波特蘭水泥協會 PCA [ 15 ] 正式作為公路及機場路面設計原始版本之依據。

第二種方法為使用有限元素法，以決定波特蘭水泥混凝土版因荷重及溫差所產生之應力與撓度。此方法中，路面結構一般被模擬為一長方形薄版置於 Winkler 基礎上，以有限元素法加以分析此剛性版之應力與應變。關於剛性路面有限元素分析法程式眾多，一般採用有限元素法分析時可在與路基為全部或部份接觸之情況下，及橫向及縱向接縫之各種不同荷重傳遞設施下，決定波特蘭水泥混凝土版因荷重及溫度變化所產生之應力及撓度。

上述兩種方法將於 7.1 及 7.2 節中加以討論，路面因荷重及溫度變化所產生之應力則將於其餘章節中敘述。

### 7.1 Westergaard 分析法

由於 Westergaard 分析非常複雜，因此其理論公式將予省略。以下將對較簡單之梁於彈性基礎上 (Beam on Elastic Foundation) 之分析法加以詳述，此法雖為簡化之方法，惟與原 Westergaard 對版置於彈性基礎上 (Plate on Elastic Foundation) 之分析法類似，前者之結果可提供對後者之分析方法及結果某種程度上之了解。

#### 7.1.1 Winkler 基礎上梁之應力分析

梁作用於 Winkler 基礎上之分析法，一如版作用於 Winkler 基礎上之 Westergaard 分析法，都基於下列假設：

- (1) 原為平面之梁或版，彎曲後仍保持平面；

- 2) 樑或版為均質、等向性及線性彈性；  
 3) 剪力對樑或版之撓度及撓曲應力之影響忽略不計；  
 4) 路基作用如 Winkler 基礎，即路基與樑或版之反力與該點之撓度成正比，如圖 7.3。

基於上述(1)~(3)之假設，樑之力矩(M)、分佈荷重(P)、撓度(Z)、撓應力(Flexure Stress)( $\sigma$ )及曲徑半徑(R)間之關係如下：

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI} \quad (7-1a)$$

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2M}{dx^2} \quad (7-1b)$$

$$P = \frac{d^2M}{dx^2} \quad (7-1c)$$

$$M = EI \frac{d^2Z}{dx^2} \quad (7-1d)$$

$$P = EI \frac{d^4Z}{dx^4} \quad (7-1e)$$

$$\sigma = \frac{MC}{I} \quad (7-1f)$$

$E$ ：樑之彈性模數

$I$ ：樑斷面之慣性矩，為  $bh^3/12$ ， $b$  及  $h$  分別為樑之寬及深度。

由上述方程式中，若荷重或彎矩為已知，則可決定任一點之撓度；相同地，若彎矩已知，則可決定樑之撓應力。

對置於 Winkler 基礎上之樑(如圖 7.3)，其分佈荷重包括外加荷重(P)及路基反力(q)，路基反力為與撓度成正比，可表示為  $q = -kz$ ； $k$  為路基反力係數，故方程式 7-1e 可改為

$$EI \frac{d^4Z}{dx^4} = P - KZ$$

$$\text{或 } \frac{d^4Z}{dx^4} + \frac{Z}{\ell^4} = \frac{P}{EI} \quad (7-2)$$

$$\text{其中 } \ell = \sqrt[4]{\frac{EI}{K}} \quad \lambda = \sqrt[4]{\frac{K}{4EI}}$$

上述為一四階微分方程式，其表示撓度與外加荷重(P)之關係。而(7-2)式之解答與所定義之係數  $\ell$  有關，例如：一有限長之樑置於 Winkler 基礎上，並承受一點荷重(如圖 7.4 所示)，則用方程式(7-2)可解得撓度與荷重間之關係如(7-3a)式

$$Z = \frac{P\lambda}{2K} e^{-\lambda x} (\cos \lambda x + \sin \lambda x) \quad (7-3a)$$

$$M = -EI \frac{d^2Z}{dx^2} = \frac{P}{4\lambda} e^{-\lambda x} (\cos \lambda x - \sin \lambda x) \quad (7-3b)$$

$$\sigma = \frac{6M}{bh^2} \quad (7-3c)$$

一旦求得撓度，可將(7-3a)式代入(7-1d)式以求得彎矩如(7-3b)式；(7-3b)式代

入(7-1f)式可求得撓應力之關係如(7-3c)式。此例於各不同位置之撓度及應力分佈如圖7.4所示。

如樑之上下面溫度不同，假設其溫差為 $(\Delta T)$ ，則將形成樑之翹曲(Warping)。因翹曲而形成之曲率可表為 $(\Delta T) \alpha / h$ ，其中 $\alpha$ 為熱膨脹係數。因此，由溫差 $(\Delta T)$ 與外加荷重 $P$ (見(7-1a)式)同時作用所造成之曲率為：

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI} + \frac{(\Delta T) \alpha}{h}$$

$$\text{或 } \frac{d^2Z}{dx^2} = \frac{M}{EI} + \frac{(\Delta T) \alpha}{h} \quad (7-4)$$

方程式(7-4)可用以分析因溫度改變而使樑所產生之應力。

### 7.1.2 Winkler 基礎上版之翹曲應力(Warping Stress)

方程式(7-1)雖用於樑之問題，亦可推廣而應用於版之類似問題，惟一不同之處，為版之問題須考慮柏松比(如圖7.5)，因此：

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \frac{1}{EI} (M_x - \mu M_y) + \frac{(\Delta T) \alpha}{h} \quad (7-5)$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = \frac{1}{EI} (M_y - \mu M_x) + \frac{(\Delta T) \alpha}{h} \quad (7-6)$$

其中 $\mu$ 為柏松比(Poisson's Ratio)

狀況 I：無限大版塊之情形(內部點)

由於是無限大版塊，所以沒有邊界之分，版塊內任何一點均為對稱，因此不可能有明顯之扭曲，因而沒有明顯之撓度，因此：

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = 0 \text{ 及 } M_x = M_y = M$$

(7-5)式及(7-6)式改為

$$\frac{(1-\mu)}{EI} M + \frac{(\Delta T) \alpha}{h} = 0, \quad M = -\frac{(\Delta T) \alpha}{h} \frac{EI}{(1-\mu)}$$

$$\sigma = \frac{Mh}{2I}$$

$$\sigma = -\frac{(\Delta T) \alpha E}{2(1-\mu)} \quad (7-7)$$

例：一典型之混凝土版：

$$E = 6 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$\alpha = 5 \times 10^{-6} \text{ in/in/}^\circ\text{F}$$

$$\mu = 0.3$$

當 $\Delta T = 35^\circ\text{F}$ ，於版之表面將產生 750psi 之張力，此應力較一般混凝土之抗張強度為大。由於溫差將隨版厚而增加，故因熱而產生之翹曲應力將因版厚增加而增大。

狀況 II：有限大版塊，方程式(7-5)及(7-6)可用以求較複雜之邊界條件問題，諸如：有限尺

寸之混凝土版內部或邊緣之應力等變數。這些分析已由 Bradbur [17] 所求出，其所求得之結果可以下列方程式表示：

$$\tau_x = \frac{E\alpha(\Delta T)}{2} C_x \quad \text{邊緣應力}$$

$$\tau_x = \frac{E\alpha(\Delta T)}{2} \left( \frac{C_x + \mu C_y}{1 + \mu} \right)$$

$$\tau_y = \frac{E\alpha(\Delta T)}{2} \left( \frac{C_y + \mu C_x}{1 + \mu} \right) \quad \text{內部應力(7-8)}$$

其中  $C_x$  及  $C_y$  為版長修正因子(如圖 7.6)；圖 7.6 中之  $L_x$  及  $L_y$  分別為  $x$  及  $y$  方向之版長； $\ell$  稱為版之相對勁度半徑(Radius of Relative Stiffness)，其定義將於談到(7-10)式時再加說明。

### 7.1. Winkler 基礎上荷重所產生之版應力

在考慮二度空間之版作用時，可將一度空間之(7-2)式就版之問題而擴充為如下之方程式：

$$\frac{\partial^4 Z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 Z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 Z}{\partial y^4} = \frac{P - KZ}{D} \quad (7-9)$$

其中  $D$  為版之撓曲勁度， $\ell$  為相對勁度半徑，

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

$$\ell = \sqrt[4]{\frac{D}{K}} = \sqrt[4]{\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)K}} \quad (7-10)$$

相對勁度半徑結合了  $E$ 、 $h$ 、 $k$ 、 $\mu$  之效應而成為單一參數，如(7-2)式與(7-10)式中之  $\ell$  即為類似之型式。(7-10)式中版之寬度為單位寬度，且由於版之柏松比效應，(7-10)式中亦增加了柏松比( $\mu$ )。

狀況：角隅荷重

海詩蘭水泥混凝土版因荷重作用於角隅所產生之應力及撓度之分析解(如圖 7.7)如下：

( $k = 0$  (角隅下方無支承))

由基本之梁理論可求得最大抗彎應力如下：

$$\tau_{\max} = \frac{3P}{h^2}$$

$$k \neq 0 \quad \Delta(x) = \frac{P}{K\ell^2} \left( 1.1 e^{-x/\ell} - \frac{0.88 a_1}{\ell} e^{-2x/\ell} \right) \quad (7-10a)$$

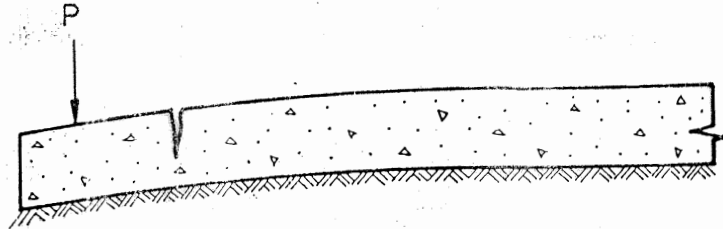
中  $\ell$  同(7-10)式之定義，且最大應力發生於  $L = 2 a_1 \ell$

單位寬度之最大彎矩，在  $x = L$  處可表示為：

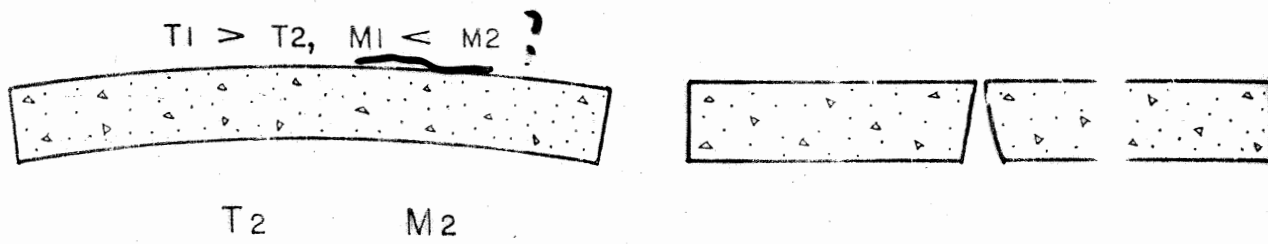
$$M = [P(L - a_1) + \int_0^L K \Delta(x) \cdot 2x \cdot (L - x) dx] / 2L$$

剛性路面設計

(a) 荷重



(b) 溫度及水份變化



(c) 路基限制

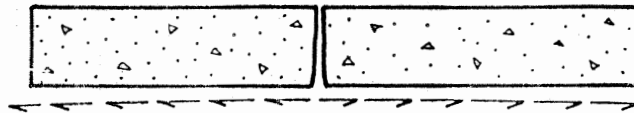


圖 7.1 PCC 路面之應力

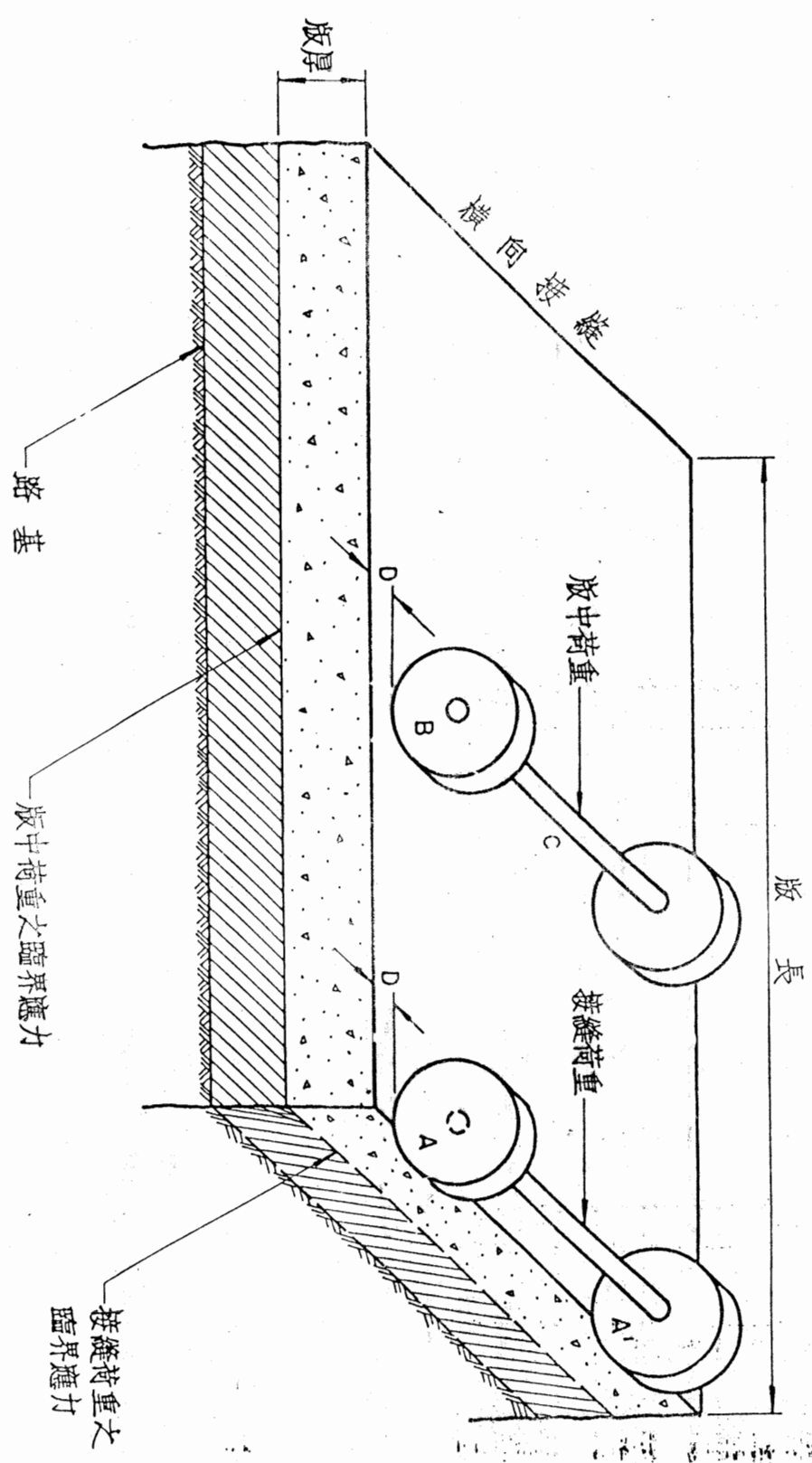


圖 7.2 混凝土版之疲勞分析所考慮之荷重位置及應力

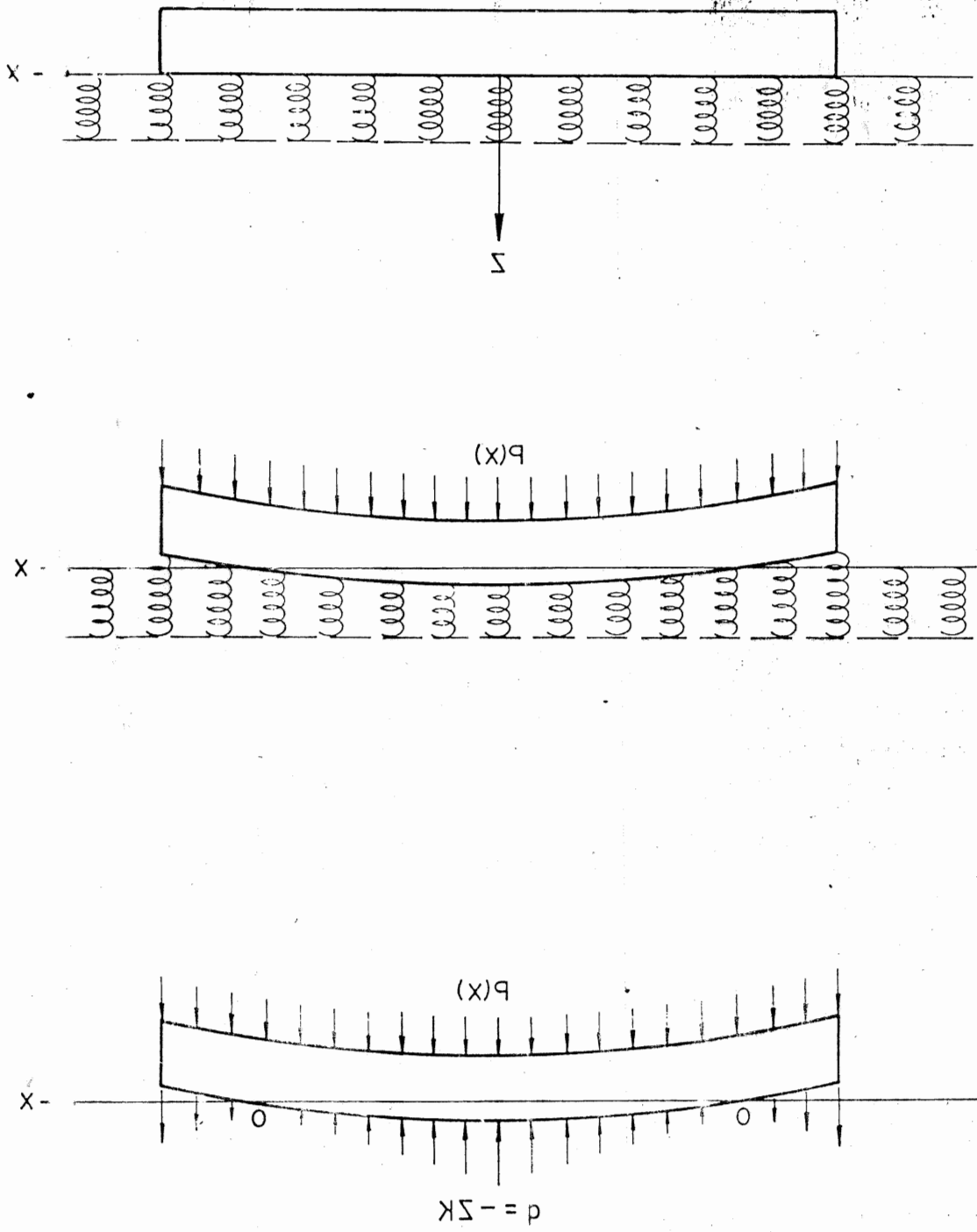


圖 7.3 Winkler 基礎上之梁



# **MECHANISTIC DESIGN MODELS OF LOADING AND THERMAL CURLING IN CONCRETE PAVEMENTS**

- Objectives:
  - To Develop Separate Edge Stress Prediction Models Due to the Individual and Combination Effects of Loading and Thermal Curling Using the ILLI-SLAB Finite Element Program
- Main Regression Algorithm Used:
  - "Projection" (PPREG) Algorithm
- Major Findings:
  - Two Additional Dimensionless Parameters Identified
  - Previous Problems Using Dimensional Analysis Are Now Resolved
  - Three Very Accurate and Dimensionally Correct Predictive Models Developed

## TWO ADDITIONAL DIMENSIONLESS PARAMETERS IDENTIFIED

### 1. Westergaard's Edge Loading Solutions:

$$\sigma_w = \frac{3(1 + \mu)P}{\pi(3 + \mu)h^2} \left[ \log_e \frac{Eh^3}{100ka^4} + 1.84 - \frac{4\mu}{3} + \frac{1 - \mu}{2} + 1.18(1 + 2\mu) \frac{a}{l} \right]$$

$$\delta_w = \frac{\sqrt{2 + 1.2\mu} P}{\sqrt{Eh^3k}} \left[ 1 - (0.76 + 0.4\mu) \frac{a}{l} \right]$$

$$l = \sqrt[4]{\frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)k}}$$

### 2. Westergaard's Thermal Curling Solutions (an infinitely long strip):

$$\sigma_y = \sigma_0 \left\{ 1 - \frac{2 \cos \lambda \cosh \lambda}{\sin 2\lambda + \sinh 2\lambda} \left[ (\tan \lambda + \tanh \lambda) \cos \frac{y}{l\sqrt{2}} \cosh \frac{y}{l\sqrt{2}} + (\tan \lambda - \tanh \lambda) \sin \frac{y}{l\sqrt{2}} \sinh \frac{y}{l\sqrt{2}} \right] \right\}$$

$$\delta_y = -\delta_0 \frac{2 \cos \lambda \cosh \lambda}{\sin 2\lambda + \sinh 2\lambda} \left[ (-\tan \lambda + \tanh \lambda) \cos \frac{y}{l\sqrt{2}} \cosh \frac{y}{l\sqrt{2}} + (\tan \lambda + \tanh \lambda) \sin \frac{y}{l\sqrt{2}} \sinh \frac{y}{l\sqrt{2}} \right]$$

$$\sigma_0 = \frac{E\alpha\Delta T}{2(1 - \mu)}, \quad \delta_0 = \frac{(1 + \mu)\alpha\Delta T l^2}{h}, \quad \lambda = \frac{W}{l\sqrt{8}}$$

**TWO ADDITIONAL DIMENSIONLESS  
PARAMETERS IDENTIFIED (CONTINUED)**

1. Westergaard's Edge Loading Solutions:

$$\sigma_w = \frac{P}{h^2} * f_1 \left( \frac{a}{l}, \mu \right)$$

$$\delta_w = \frac{P}{\sqrt{Eh^3k}} * f_2 \left( \frac{a}{l}, \mu \right)$$

$$l = \sqrt[4]{\frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)k}}$$

2. Westergaard's Thermal Curling Solutions:

$$\sigma_y = E\alpha\Delta T * f_3 \left( \frac{L}{l} \text{ or } \frac{W}{l}, \mu \right)$$

$$\delta_y = \frac{\alpha \Delta T l^2}{h} * f_4 \left( \frac{L}{l} \text{ or } \frac{W}{l}, \mu \right)$$

3. Deflection at the Center of the ILLI-SLAB Program:

$$\delta = \frac{\gamma h}{k}$$

4. Two Additional Dimensionless Parameters Identified:

$$D_\gamma = \frac{\gamma h^2}{kl^2}$$

$$D_P = \frac{Ph}{kl^4} = 12(1 - \mu^2) \frac{P}{Eh^2}$$

where  $D_\gamma$  and  $D_P$  are dimensionless parameters to represent the relative deflection stiffness due to the self-weight of the concrete slab, external wheel load, and the possible loss of subgrade support.

## LOADING ONLY

### 1. Finite Slab Length Effect:

$$R_L = \frac{\sigma_i}{\sigma_w} = f\left(\frac{a}{l}, \frac{L}{l}\right)$$

### 2. Finite Slab Width Effect:

$$R_W = \frac{\sigma_i}{\sigma_w} = f\left(\frac{a}{l}, \frac{W}{l}\right)$$

Where:

$R_L$  = an adjustment (multiplication) factor for the finite slab length effect;

$R_W$  = an adjustment factor for the finite slab width effect;

$\sigma_w$  = Westergaard's edge stress solution,  $[FL^{-2}]$ ; and

$\sigma_i$  = edge stress determined by the finite element model,  $[FL^{-2}]$ .

## THERMAL CURLING ONLY

$$R_c = \frac{\sigma_i}{\sigma_c} = f \left( \alpha \Delta T, \frac{L}{l}, \frac{W}{l}, \frac{\gamma h^2}{kl^2} \right)$$

Where:

$R_c$  = an adjustment factor for thermal curling;

$\sigma_c$  = Westergaard/Bradbury's edge stress solution, [FL<sup>-2</sup>]; and

$\sigma_i$  = edge stress determined by the finite element model, [FL<sup>-2</sup>].

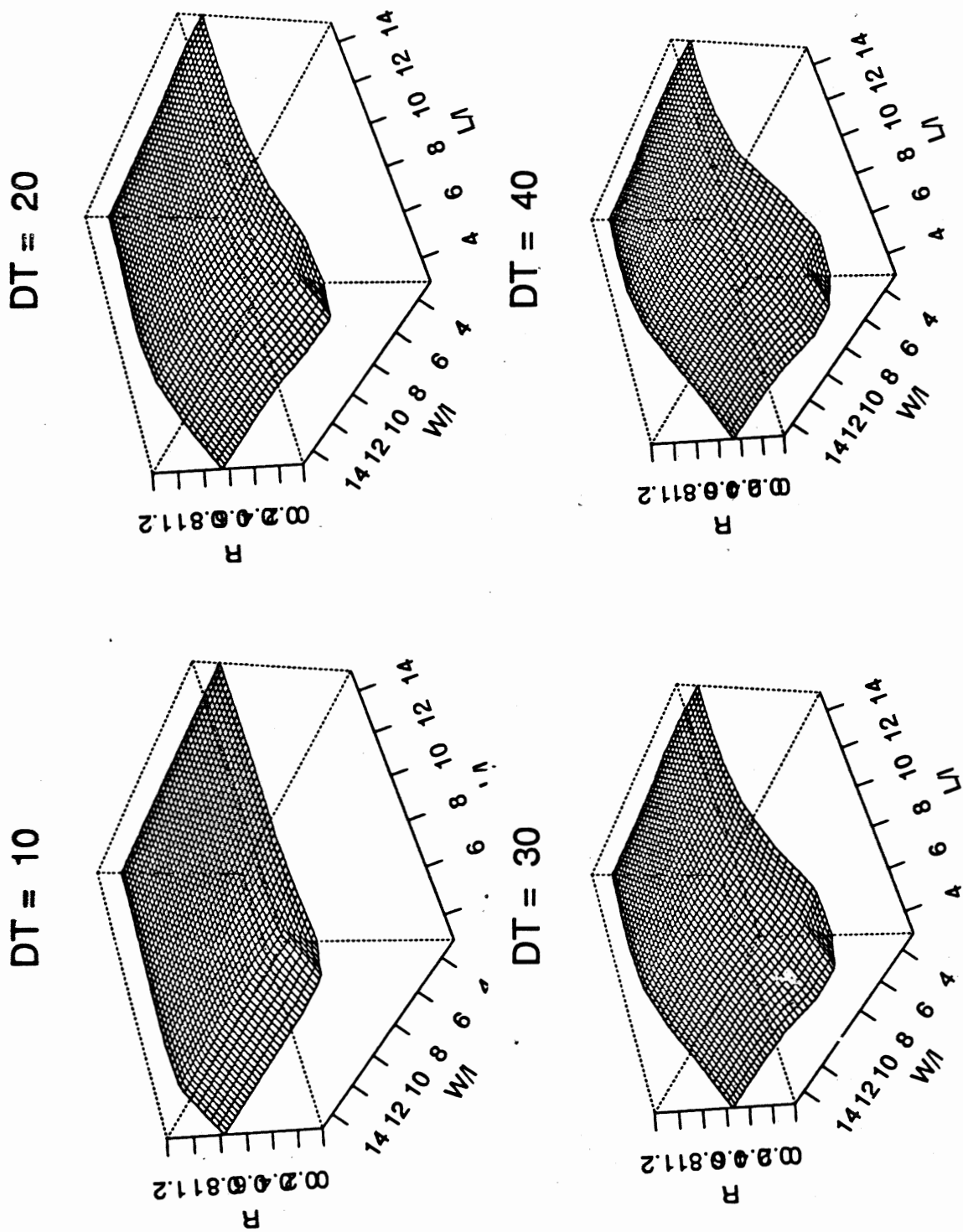


Figure 6.5 - Effect of a Positive Temperature Differential, a Finite Slab Length, and a Finite Slab Width

## LOADING AND THERMAL CURLING

$$R_T = \frac{\sigma_i - \sigma_L}{\sigma_c} = f \left( \frac{a}{l}, \alpha \Delta T, \frac{L}{l}, \frac{W}{l}, \frac{\gamma h^2}{kl^2}, \frac{Ph}{kl^4} \right)$$

Where:

$\sigma_i$  = total edge stress determined by the finite element model, [FL<sup>-2</sup>];

$\sigma_L$  = edge stress determined by the finite element model due to wheel loading alone, [FL<sup>-2</sup>];

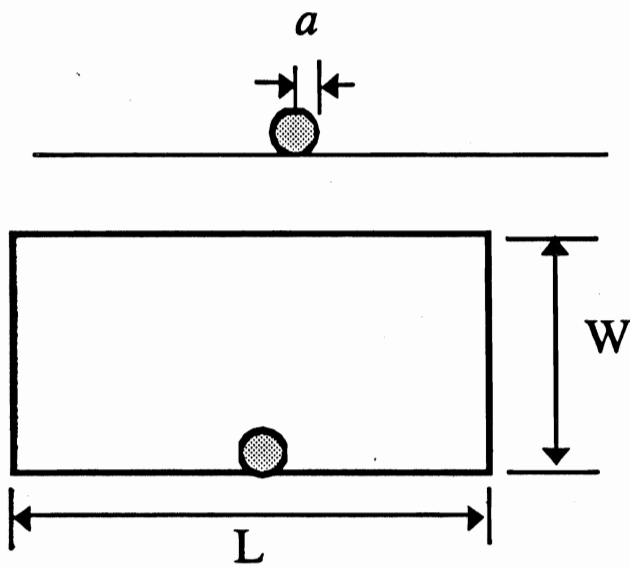
$\sigma_c$  = Westergaard/Bradbury's edge stress solution, [FL<sup>-2</sup>]; and

$R_T$  = an adjustment factor for the effect of loading plus thermal curling.



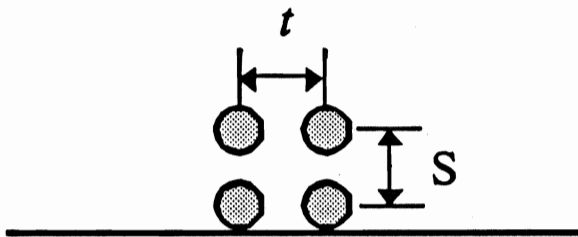
# Concrete Pavement

# Mechanistic Variables

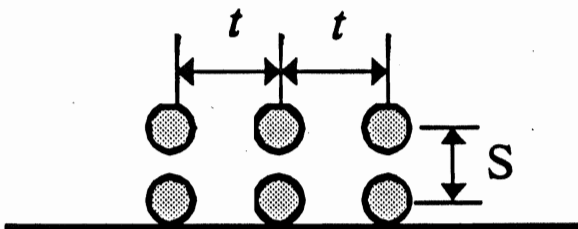


$$a/l$$

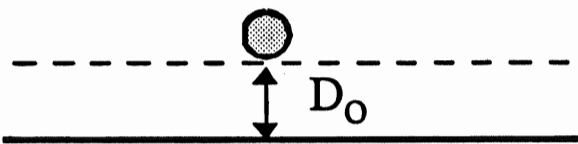
$$a/l, L/l, W/l$$



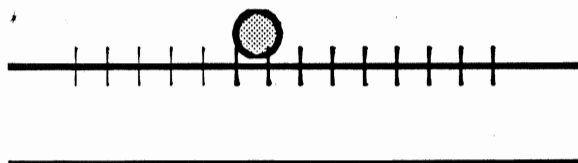
$$a/l, t/l, S/l$$



$$a/l, t/l, S/l$$



$$a/l, D_0/l$$



$$a/l, AGG/kl$$