

D 剛性鋪面之應力分析

D.1 接縫式混凝土路面(JCP)應力分析

資料來源：

交通部台灣區國道新建工程局，“北二高剛性路面建造講習”，第50-63頁，中華民國七十九年。

D.2 接縫式混凝土鋪面邊界荷重與撓屈應力分析

資料來源：

Lee, Y. H., and M. I. Darter, "Loading and Curling Stress Models for Concrete Pavement Design," Transportation Research Record 1449, Transportation Research Board, National Research Council, Washington, D.C., 1994, pp. 101-113.

D.3 建立鋪面預估模式之新技術

資料來源：

Lee, Y. H., and M. I. Darter, "New Predictive Modeling Techniques for Pavements," Transportation Research Record 1449, Transportation Research Board, National Research Council, Washington, D.C., 1994, pp. 234-245.

D.1 接縫式混凝土路面(JCP)應力分析

剛性路面設計

7. 接縫式混凝土路面(JCP)應力分析

接縫式混凝土路面分析中，導致路面應力產生之因素如下：

- (a)外加荷重
- (b)溫度差異
- (c)水份變化
- (d)不均勻路基支承

上述各因素對路面之反應各有不同之影響，部份影響如圖 7.1 所示。

基於上述各種因素，臨界應力及撓度可能發生於混凝土路面中不同位置。如圖 7.2 所示，臨界應力可能發生於角隅(A)、橫向接縫(A')或縱向接縫(B)，亦有可能發生於內部(C)。

在本節中，將介紹兩種最常用之應力分析方法。第一種方法主要將混凝土路面考慮為一無有限大之版塊，置於被視為 Winkler 基礎之路基上，其荷重作用於角隅、邊緣或內部。因溫度差異而產生之翹曲(Warping)應力亦可用同一方法，以無限及有限大之版塊加以分析。Westergaard [11-13] 最先使用此種方法決定波特蘭水泥混凝土之臨界應力，其結果為 Pickett 及 Ray [14] 所引用而發展出影響圖，且被波特蘭水泥協會 PCA [15] 正式作為公路及機場路面設計原始版本之依據。

第二種方法為使用有限元素法，以決定波特蘭水泥混凝土版因荷重及溫差所產生之應力與撓度。此方法中，路面結構一般被模擬為一長方形薄版置於 Winkler 基礎上，以有限元素法加以分析此剛性版之應力與應變。關於剛性路面有限元素分析法程式眾多，一般採用有限元素法分析時可在與路基為全部或部份接觸之情況下，及橫向及縱向接縫之各種不同荷重傳遞設施下，決定波特蘭水泥混凝土版因荷重及溫度變化所產生之應力及撓度。

上述兩種方法將於 7.1 及 7.2 節中加以討論，路面因荷重及溫度變化所產生之應力，則將於其餘章節中敘述。

7.1 Westergaard 分析法

由於 Westergaard 分析非常複雜，因此其理論公式將予省略。以下將對較簡單之樑於彈性基礎上(Beam on Elastic Foundation)之分析法加以詳述，此法雖為簡化之方法，惟與原 Westergaard 對版置於彈性基礎上(Plate on Elastic Foundation)之分析法類似，前者之結果可提供對後者之分析方法及結果某種程度上之了解。

7.1.1 Winkler 基礎上樑之應力分析

樑作用於 Winkler 基礎上之分析法，一如版作用於 Winkler 基礎上之 Westergaard 分析法，都基於下列假設：

- (1)原為平面之樑或版，彎曲後仍保持平面；

(2) 樑或版為均質、等向性及線性彈性；

(3) 剪力對樑或版之撓度及撓曲應力之影響忽略不計；

(4) 路基作用如 Winkler 基礎，即路基與樑或版之反力與該點之撓度成正比，如圖 7.3。

基於上述(1)~(3)之假設，樑之力矩 (M)、分佈荷重 (P)、撓度 (Z)、撓應力 (Flexure Stress) (σ) 及曲徑半徑 (R) 間之關係如下：

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI} \quad (7-1a)$$

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2M}{dx^2} \quad (7-1b)$$

$$P = \frac{d^2M}{dx^2} \quad (7-1c)$$

$$M = EI \frac{d^2Z}{dx^2} \quad (7-1d)$$

$$P = EI \frac{d^4Z}{dx^4} \quad (7-1e)$$

$$\sigma = \frac{MC}{I} \quad (7-1f)$$

E：樑之彈性模數

I：樑斷面之慣性矩，為 $bh^3/12$ ，b 及 h 分別為樑之寬及深度。

由上述方程式中，若荷重或彎矩為已知，則可決定任一點之撓度；相同地，若彎矩已知，則可決定樑之撓應力。

對置於 Winkler 基礎上之樑 (如圖 7.3)，其分佈荷重包括外加荷重 (P) 及路基反力 (q)，路基反力為與撓度成正比，可表示為 $q = -kz$ ；k 為路基反力係數，故方程式 7-1e 可改為

$$EI \frac{d^4Z}{dx^4} = P - KZ$$

$$\text{或} \frac{d^4Z}{dx^4} + \frac{Z}{\ell^4} = \frac{P}{EI} \quad (7-2)$$

$$\text{其中} \ell = \sqrt[4]{\frac{EI}{K}} \quad \lambda = \sqrt[4]{\frac{K}{4EI}}$$

上述為一四階微分方程式，其表示撓度與外加荷重 (P) 之關係。而 (7-2) 式之解答與所定義之參數 ℓ 有關，例如：一有限長之樑置於 Winkler 基礎上，並承受一點荷重 (如圖 7.4 所示)，則利用方程式 (7-2) 可解得撓度與荷重間之關係如 (7-3a) 式

$$Z = \frac{P\lambda}{2K} e^{-\lambda x} (\cos \lambda x + \sin \lambda x) \quad (7-3a)$$

$$M = -EI \frac{d^2Z}{dx^2} = \frac{P}{4\lambda} e^{-\lambda x} (\cos \lambda x - \sin \lambda x) \quad (7-3b)$$

$$\sigma = \frac{6M}{bh^2} \quad (7-3c)$$

一旦求得撓度，可將 (7-3a) 式代入 (7-1d) 式以求得彎矩如 (7-3b) 式；(7-3b) 式代

入(7-1f)式可求得撓應力之關係如(7-3c)式。此例於各不同位置之撓度及應力分佈如圖 7.4 所示。

如樑之上下面溫度不同，假設其溫差為 (ΔT) ，則將形成樑之翹曲(Warping)。因翹曲而形成之曲率可表為 $(\Delta T) \alpha / h$ ，其中 α 為熱膨脹係數。因此，由溫差 (ΔT) 與外加荷重 P (見(7-1a)式)同時作用所造成之曲率為：

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI} + \frac{(\Delta T) \alpha}{h}$$

$$\text{或 } \frac{d^2Z}{dx^2} = \frac{M}{EI} + \frac{(\Delta T) \alpha}{h} \quad (7-4)$$

方程式(7-4)可用以分析因溫度改變而使樑所產生之應力。

7.1.2 Winkler 基礎上版之翹曲應力(Warping Stress)

方程式(7-1)雖用於樑之問題，亦可推廣而應用於版之類似問題，惟一不同之處，為版之問題須考慮柏松比(如圖 7.5)，因此：

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \frac{1}{EI} (M_x - \mu M_y) + \frac{(\Delta T) \alpha}{h} \quad (7-5)$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = \frac{1}{EI} (M_y - \mu M_x) + \frac{(\Delta T) \alpha}{h} \quad (7-6)$$

其中 μ 為柏松比(Poisson's Ratio)

狀況 I：無限大版塊之情形(內部點)

由於是無限大版塊，所以沒有邊界之分，版塊內任何一點均為對稱，因此不可能有明顯之扭曲，因而沒有明顯之撓度，因此：

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = 0 \text{ 及 } M_x = M_y = M$$

(7-5)式及(7-6)式改為

$$\frac{(1-\mu)}{EI} M + \frac{(\Delta T) \alpha}{h} = 0, \quad M = -\frac{(\Delta T) \alpha}{h} \frac{EI}{(1-\mu)}$$

$$\sigma = \frac{Mh}{2I}$$

$$\sigma = -\frac{(\Delta T) \alpha E}{2(1-\mu)} \quad (7-7)$$

例：一典型之混凝土版：

$$E = 6 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$\alpha = 5 \times 10^{-6} \text{ in / in / } ^\circ\text{F}$$

$$\mu = 0.3$$

當 $\Delta T = 35^\circ\text{F}$ ，於版之表面將產生 750psi 之張力，此應力較一般混凝土之抗張強度為大。由於溫差將隨版厚而增加，故因熱而產生之翹曲應力將因版厚增加而增大。

狀況 II：有限大版塊，方程式(7-5)及(7-6)可用以求較複雜之邊界條件問題，諸如在有限尺

寸之混凝土版內部或邊緣之應力等變數。這些分析已由 Bradburg [17] 所求出，其所求得之結果可以下列方程式表示：

$$\sigma_x = \frac{E\alpha(\Delta T)}{2} C_x \quad \text{邊緣應力}$$

$$\sigma_x = \frac{E\alpha(\Delta T)}{2} \left(\frac{C_x + \mu C_y}{1 + \mu} \right)$$

$$\sigma_y = \frac{E\alpha(\Delta T)}{2} \left(\frac{C_y + \mu C_x}{1 + \mu} \right) \quad \text{內部應力 (7-8)}$$

其中 C_x 及 C_y 為版長修正因子(如圖 7.6)；圖 7.6 中之 L_x 及 L_y 分別為 x 及 y 方向之版長； ℓ 稱為版之相對勁度半徑(Radius of Relative Stiffness)，其定義將於談到(7-10)式時再加說明。

7.1.3 Winkler 基礎上荷重所產生之版應力

在考慮二度空間之版作用時，可將一度空間之(7-2)式就版之問題而擴充為如下之方程式：

$$\frac{\partial^4 Z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 Z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 Z}{\partial y^4} = \frac{P - KZ}{D} \quad (7-9)$$

其中 D 為版之撓曲勁度， ℓ 為相對勁度半徑，

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

$$\ell = \sqrt{\frac{D}{K}} = \sqrt{\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)K}} \quad (7-10)$$

相對勁度半徑結合了 E 、 h 、 k 、 μ 之效應而成為單一參數，如(7-2)式與(7-10)式中之 ℓ 即為類似之型式。(7-10)式中版之寬度為單位寬度，且由於版之柏松比效應，(7-10)式中亦增加了柏松比(μ)。

狀況 I：角隅荷重

波特蘭水泥混凝土版因荷重作用於角隅所產生之應力及撓度之分析解(如圖 7.7)如下：

(a) $k = 0$ (角隅下方無支承)

由基本之梁理論可求得最大抗彎應力如下：

$$\sigma_{\max} = \frac{3P}{h^2}$$

(b) $k \neq 0$ $\Delta(X) = \frac{P}{K\ell^2} \left(1.1 e^{-X/\ell} - \frac{0.88 a_1}{\ell} e^{-2X/\ell} \right) \quad (7-10a)$

其中 ℓ 同(7-10)式之定義，且最大應力發生於 $L = 2 a_1 \ell$ 每單位寬度之最大彎矩，在 $x = L$ 處可表示為：

$$M = \left[P(L - a_1) + \int_0^L K \Delta(X) \cdot 2X \cdot (L - X) dx \right] / 2L$$

$$= \frac{P}{2} \left[1 - \left(\frac{a_1}{\ell} \right)^{0.6} \right]$$

其最大應力為：

$$\sigma = \frac{6M}{h^2} = \frac{3P}{h^2} \left[1 - \left(\frac{a_1}{\ell} \right)^{0.6} \right] \quad (7-10b)$$

狀況 II：邊緣荷重及內部荷重

以(7-9)式解一有限版於邊緣及內部之應力與撓度，因其解答過於複雜，故不在此詳述。傳統上，這些問題之應力與撓度都可以 Pickett 及 Ray [14] 所發展之影響圖解之；最近 Packard [18] 亦發展一電腦程式以解決這些問題。

混凝土版置於 Winkler 基礎上之彎矩及撓度之影響圖見圖 7.8 至 7.11，其解法為將接觸輪荷重映繪於影響圖上，再計算映繪面積內部所包含之格數，再利用下列方程式計算其撓度、彎矩及應力。

$$\begin{aligned} \text{撓度 } \Delta &= \frac{0.0005 P \ell^4 N}{D} \\ \text{彎矩 } M &= \frac{P \ell^2 N}{10,000} \\ \text{應力 } \sigma &= \frac{6M}{h^2} \end{aligned} \quad (7-11)$$

其中 P 為平均接觸壓力，N 為映繪面積中之格數，h 為版厚， ℓ 及 D 則分別如(7-10)式中之定義。

7.2 有限元素法

本節將敘述以有限元素法決定混凝土版塊之應力及撓度之原理。此法係基於薄版理論，其假設與 7.1 節中樑置於彈性基礎上之假設相同。薄版置於 Winkler 基礎上之有限元素法，其基本方程式係由 Zienkiewicz 及 Cheung [19] 所提出，元素之佈置如圖 7-12 所示，元素於有限數量之節點相互聯接。此法可求得一組對所有節點之力與位移關係之聯立方程式如(7.12)式，由此可解得版中每一元素之未知節點位移。

$$k [A] \{ \delta' \} = \{ F \} [K] \{ \delta \} \quad (7-12)$$

上式中 k 為路基反力模數；[A] 為一對角矩陣，表示路基反力分佈之面積；{ δ' } 為一表示路基位移之向量；{F} 為一向量，表示所有作用於版上之力；{ δ } 為一節點位移向量；[K] 為版之組合勁度矩陣。求得節點位移之後，則可據以求得節點彎矩及應力。由於以某一元素計算所得之節點應力可能有別於以相鄰元素所求得者，因此，節點應力須採用所有相鄰元素所求得之平均應力值。

一般採用有限元素法計算混凝土版塊所發展之電腦程式具有下列之功能：

- (1) 部份或全部通過縱向及橫向接縫之荷重傳遞可表示為荷重傳遞效率 (Load transfer efficiency)。
- (2) 版之溫度捲曲應力 (Thermal curling stress)。

(3)部份或全部之路基支承。

有限元素法之精確度已經由邊緣荷重作用於無限大版之 Westergaard 理論解，及影響圖〔16〕之解法得到証實。

有限元素法之解答亦曾與 AASHO 道路試驗〔16,20,21〕中有限版塊之邊緣應力實驗結果相比較，AASHO 道路試驗所用之版為 15 呎長、12 呎寬，且於橫向及縱向接縫分別設置綴縫筋及繫筋。有限元素法之結果與所測得之路面邊緣應力值如圖 7.13 所示。版之有限元素法解答之基本參數為：楊氏模數 $6.25 \times 10^6 \text{psi}$ ，由道路試驗所測得波特蘭水泥混凝土之柏松比 0.28, k 值 300pci。量測所得之邊緣應力係由在相同位置實際量測之應變值求得。

版因溫度差異而產生之捲曲應力 (Curling stress)，其有限元素法解之精確度已由美國 Virginia 州 Arlington 之 Tellen 及 Southerland 之試驗結果〔22〕得到証實；其比較結果則由 Darter 發表，如圖 7.14。

以有限元素法計算捲曲應力，提供了較 Bradbury〔17〕分析更為實用之分析方法，有限元素法容許版於無重量條件下捲曲，然後再加上版之束縛重量，因此，版為受制於其本身之重量。Bradbury 模式則假設全部版面均受限制，因此將產生更高之應力。版厚及基礎模數在某一範圍內時，茲將上述兩種方法計算所得之應力比較如下：

以 Bradbury 法〔17〕及有限元素法計算溫度邊緣捲曲應力 (Curling stress) 之比較：

版厚(吋)	模式	基礎模數 (k) — pci		
		50	200	500
8	有限元素法	134 * psi	204	247
	Bradbury	144	246	294
10	有限元素法	105	178	204
	Bradbury	98	255	330
14	有限元素法	66	129	145
	Bradbury	100	210	341

(參考資料:〔21〕)

使用參數：版長 : 15 呎
 溫度梯度 : 3°F/ in
 彈性模數 : $5 \times 10^6 \text{psi}$
 熱膨脹係數 : $5 \times 10^{-6}/^\circ\text{F}$

以 Bradbury 模式計算所得之溫度捲曲應力，平均比以有限元素計算所得之數值大 43%。由於大部份 Bradbury 法與量測值之比較結果，都顯示量測值較低，因此，有限元素法較 Bradbury 模式更接近量測值。

總而言之，以有限元素法預估波特蘭水泥混凝土之應力，其精確度與以 Westergaard 法及 Bradbury 法所預估者相當，甚至更佳。

7.3.2 路面因素對荷重產生應力之影響

不同版厚、k 值、版長及支承侵蝕力等對邊緣應力(沿縱向接縫)之影響，詳見參考資料〔21〕。其中所採用之路面性質與本節開端處所列者相同，部份結果如圖 7 - 18 所示。

7.4 翹曲(Warping)產生之應力

不同路面性質對於因溫度差異所產生之翹曲應力，亦曾由 Darter〔21〕以有限元素法加以研究，其結果如圖 7 - 19。此結果顯示翹曲應力在縱向邊緣上最為明顯，當溫度梯度(Gradient)為正(日間)，混凝土版底部所產生之邊緣應力為張力。

7.5 摩擦力產生之應力

混凝土乾縮及溫度改變均會使混凝土版產生張應力。此兩種因素均會使版收縮，且因基層之摩擦阻力使版產生張應力，其均勻變化時，所產生之最大張應力可由下式加以推估：

$$\sigma_T = \frac{r \cdot f \cdot L}{288} \quad (7-13)$$

其中 σ_T ：混凝土張應力，〔psi〕
 r ：混凝土單位重，〔pcf〕
 f ：平均路基摩擦係數，由 1.0 至 2.0 間
 L ：版長，〔ft〕

7.3 荷重所產生之應力

本節將敘述荷重作用下，混凝土版塊所產生之應力 [21] ，基本上為應用上節所述，以有限元素法程式計算混凝土版塊在受外力作用時所產生之應力。計算版之應力時，所採用之數據如下：

版長(L)	= 15ft
版寬	= 12ft
版厚	= 10in
波特蘭水泥混凝土彈性模數	= 5×10^6 psi
波特蘭水泥混凝土熱膨脹係數	= $5 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{F}$
路基反力模數(k)	= 200pci
荷重	= 18kip (單軸)

根據以上數據所求得之結果加以討論如下。

7.3.1 縱向與橫向接縫附近及角隅之應力

將縱向與橫向接縫附近之臨界張應力(如圖 7.2)加以濃縮，其結果如圖 7-15 及 7-16 所示。圖中顯示卡車側向移動(D)對版底部所產生之張應力的影響。當荷重作用於縱向接縫附近時(如圖 7.15)，此荷重作用在版邊緣會產生最大之應力，由此荷重條件所產生之最大張應力約為 220psi；當荷重作於橫向接縫時，於橫向接縫所產生之應力則相當小(如圖 7.16)。計算應力時，橫向接縫之荷重傳遞效率假設為 50%。

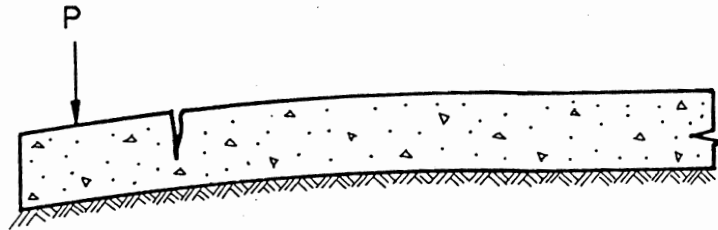
荷重作用於角隅所產生之最大張應力如圖 7.7 所示，對相同之路面性質仍採用(7-10a)式計算。當 $k = 200$ pci 時，最大張應力為 185psi； $k = 0$ 時，最大張應力則為 270psi。

在計算角隅應力時，橫向接縫為假設沒有荷重傳遞設施，若有荷重傳遞設施存在，則最大角隅應力可大幅度減小。

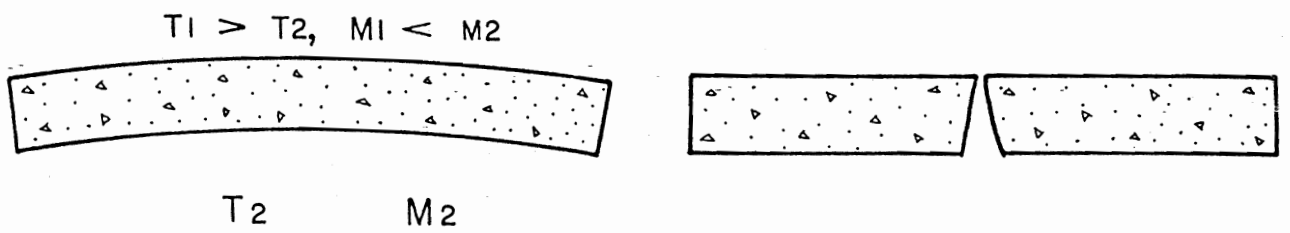
由此分析可知，最大應力發生於縱向接縫附近，此位置不僅受荷重時之應力最大，且受溫度作用所產生之應力亦較高，(溫度效應將於下一節中討論)。因此，橫向裂縫較可能由此位置開始發生及擴展，此亦大致可由現場觀察結果加以証實。在 AASHO 道路試驗中，橫向裂縫首先發生者，在 91 次之 JCP 及 JRCP 路段中即佔了 61 次。圖 7.17 所示為一 8 吋混凝土版中，裂縫開始發生及擴展之情形。由 Michigan 試驗道路之結果亦顯示，橫向裂縫為主要之破壞型式，每哩情況如下：

	接 縫 間 距，(呎)		
	30	20	15
橫 向	296	139	50
對 角	7	6	0
縱 向	4	20	11

(a) 荷重



(b) 溫度及水份變化



(c) 路基限制

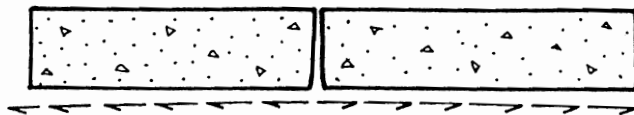


圖 7.1 PCC 路面之應力

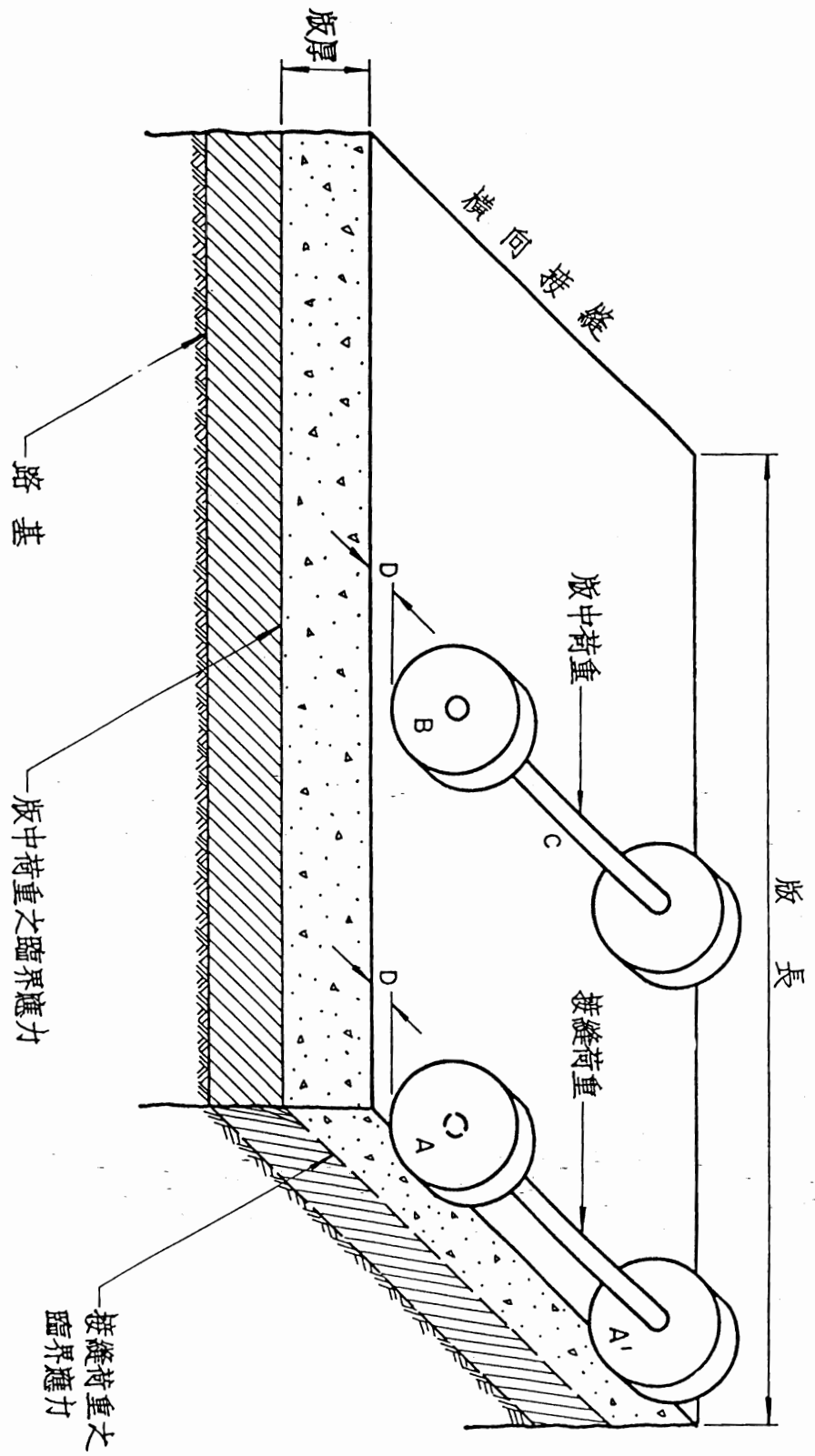


圖 7.2 混凝土版之疲勞分析所考慮之荷重位置及應力

剛性路面設計

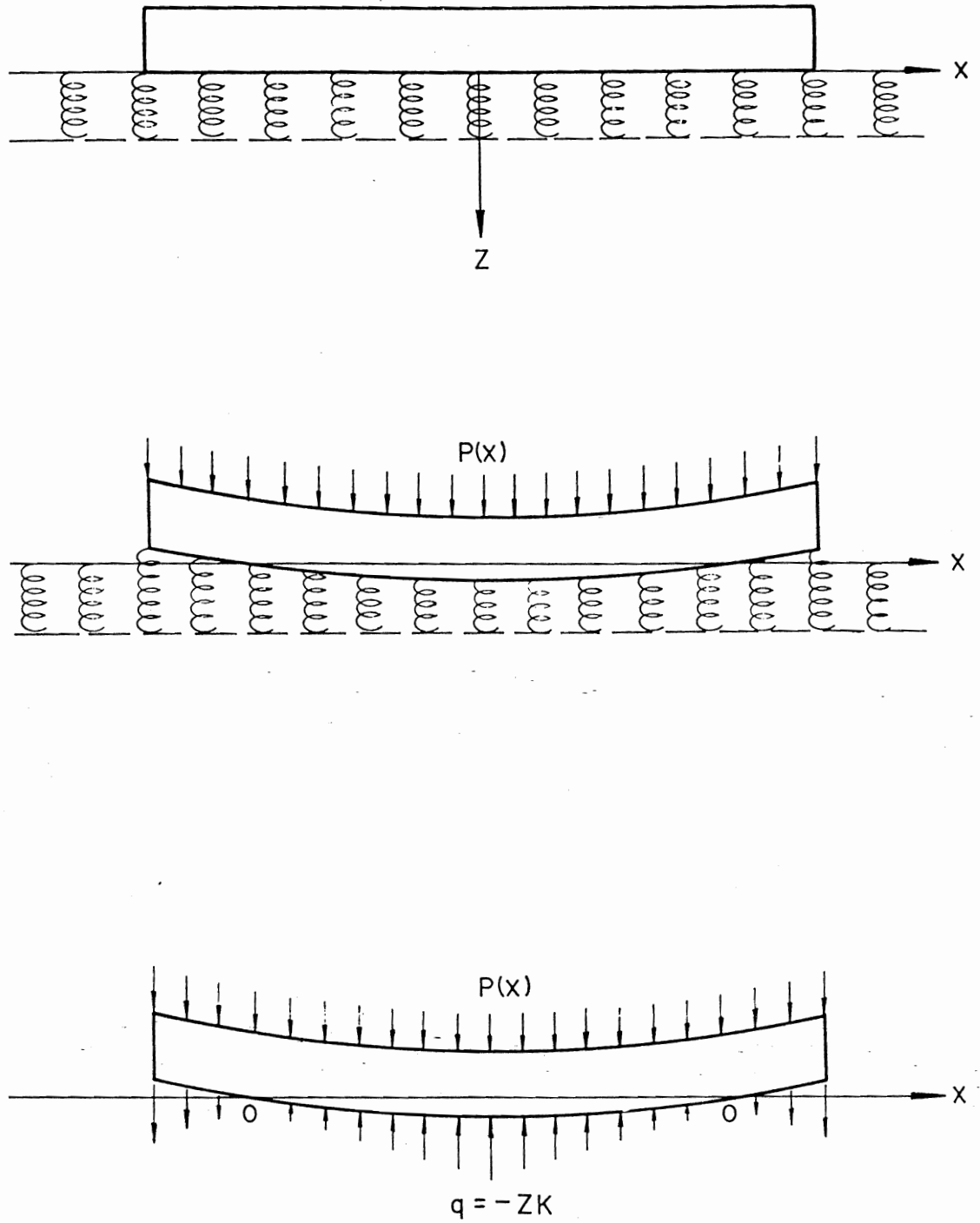


圖 7.3 Winkler 基礎上之樑

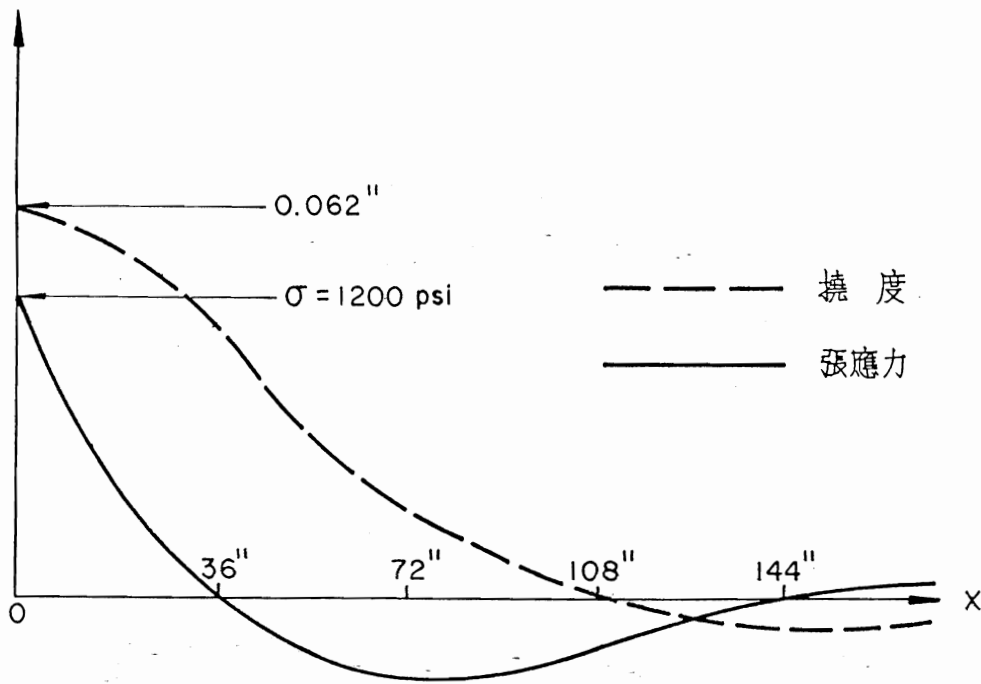
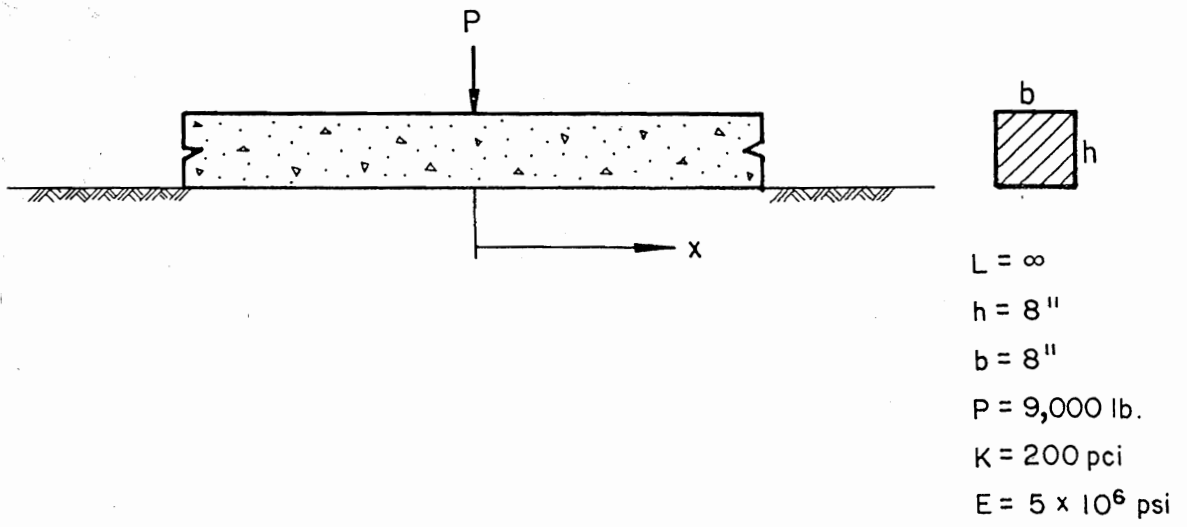


圖 7.4 樑於 Winkler 基礎上之應力與撓度

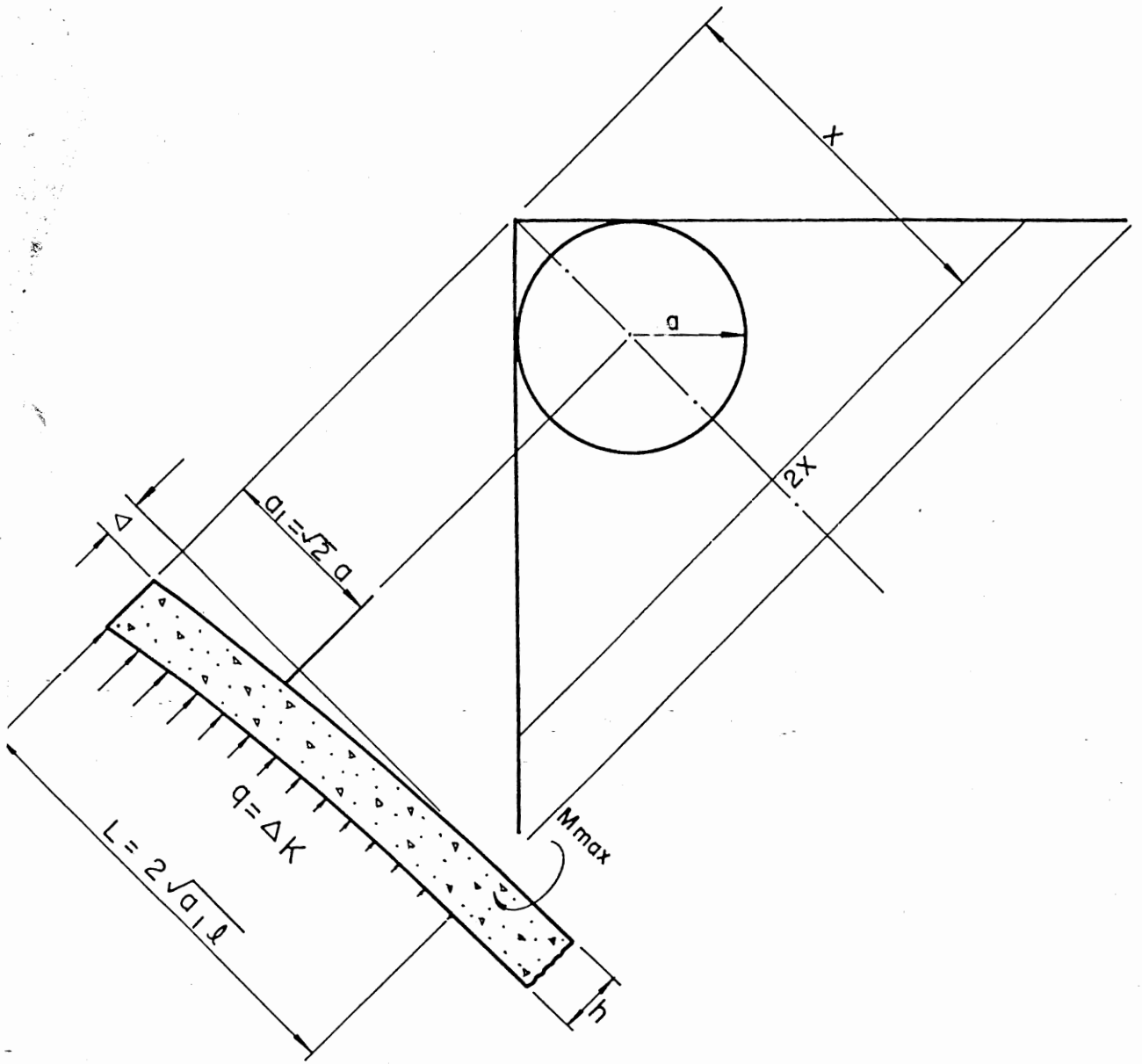


圖 7.7 角隅荷重下之應力

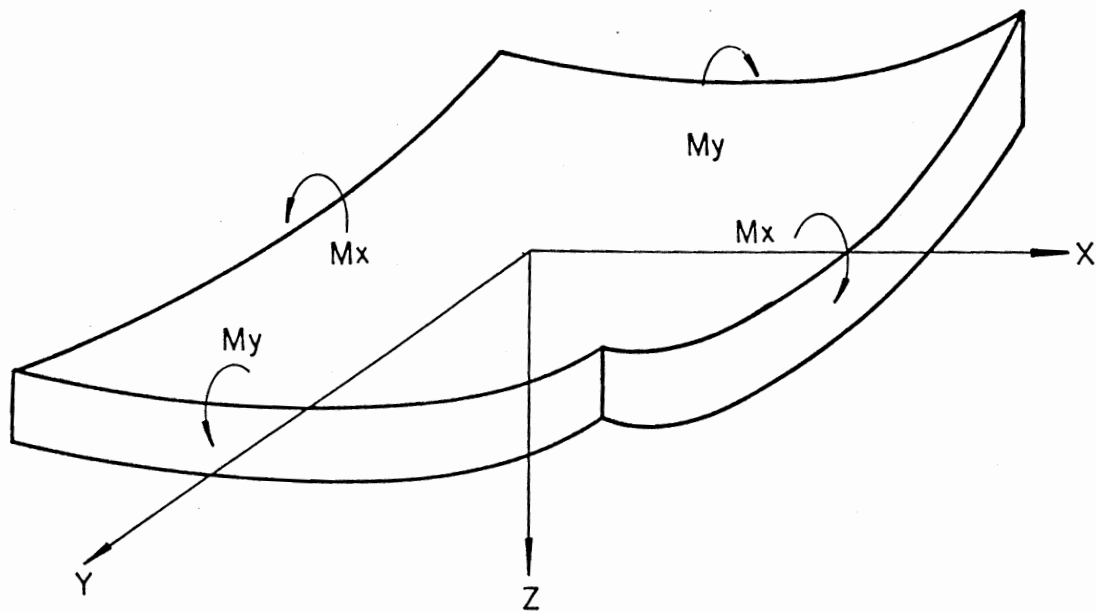


圖 7.5 Winkler 基礎上之版

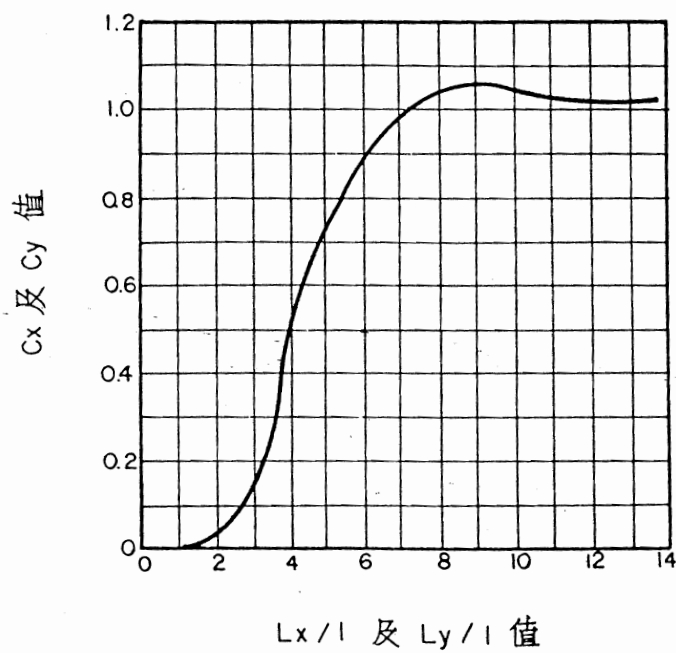


圖 7.6 翹曲應力係數