

B.3 由面層撓度值回算鋪面彈性模數的初步研究

由面層撓度值回算鋪面彈性 模數的初步研究

陳建桓
淡江大學
土木工程研究所
碩士

李英豪
淡江大學
土木工程系
副教授

摘要

本文主要的目的乃是針對傳統回算程式的一些明顯缺點，如：彈性模數值的回算解可能不唯一，輸入模數值範圍的選擇仍沒有可依循之準則、而且回算過程不僅耗費時間甚至有時可能會有不收斂的問題等，做理論的研究改進。本文首先以Burmister與Scrivner的二層彈性理論之撓度方程式為基礎，利用因次分析的原理推導出影響該函數的主要無因次參數。然後，再確立面層撓度值與回算彈性模數值的一對一函數關係，並依此建立資料庫與預估方程式組，以便於各層彈性模數值的快速運算。最後再以實例作初步的驗證，並提出未來應用與改進的具體建議。

一、前言

在鋪面管理系統中，對於道路鋪面的養護維修工作，有賴於定期對於現有道路鋪面的結構進行評估，以瞭解鋪面狀況。為表示鋪面結構的強度，以往必須在鋪面上直接鑽心取樣，再於實驗室中求得應力與應變關係，以決定鋪面各層材料的彈性模數(Elastic Modulus)。這種方法不僅費時費事，而且鑽心取樣會對鋪面的結構造成直接的破壞，影響其結構強度。

近年來，利用非破壞性試驗(Non-Destructive Testing)量測鋪面表面撓度值以反映鋪面結構狀況，既不會破壞現有鋪面結構而且量測速度快，因此已被廣泛地應用。目前較常用的非破壞性試驗儀器有動力撓度儀(Dynaflect)、路面評審儀(Road Rater)、和衝擊荷重撓度儀(Falling Weight Deflectometer)等。然而，由於用以表示鋪面結構強度的彈性模數值，無法由非破壞性試驗量測的表面撓度值直接計算而得，因此，一般是以回算的方式回算出鋪面各層材料的彈性模數。

1.1 研究目的

目前回算程式所使用的回算法大致可分為兩大類：反覆計算法和資料庫處理法。反覆計算法是利用一系列反覆計算與重複修正的步驟，以假設一組彈性模數值所計算出的撓度值與實測撓度值比較，使其誤差在指定可接受的誤差範圍內。資料庫處理法則是以鋪面與路面的彈性模數所計算出的表面撓度值，建立成一個大型的資料庫。使用時，將實際量測的撓度值與資料庫中的撓度值比較，找出一組合適的彈性模數值。

本研究主要目的乃針對傳統回算程式的一些明顯缺點，做理論的研究改進 [1]。由於傳統回算法過程複雜，若僅從多層線性彈性系統為考量，目前仍存在一些問題尚待解決，如：

- (1) 從量測之撓度值估算出彈性模數值的解可能不唯一。
- (2) 回算程式中輸入資料範圍的選擇，將影響回算結果的正確性甚巨，然目前仍沒有可依循之準則。
- (3) 反覆運算的過程不僅耗費時間，甚至有時可能會有不收斂的問題。

本文除了針對上述問題研究改進的方法，並擬融合資料庫回算法的理念與最新的統計迴歸方法，建立一個能由面層撓度值直接計算出各層彈性模數值的預估方程式組。該預估方程式組不僅可免除反覆運算的時間，在面層撓度量測與彈性模數值回算的過程亦有了及時性。如此，不僅可以在試驗現場立即計算出各層之彈性模數值，必要時亦可重複該非破壞性撓度試驗，以確保所量測資料與回算之彈性模數值的正確性。此外，若有必要運用傳統回算程式時，該預估方程式組的可能預估誤差範圍亦可做為選定傳統回算程式中設定彈性模數值範圍的基本準則。

1.2 研究方法

當理論分析工具無法產生封閉型解，或是在研究涉及許多數值和經驗性的一些工程問題上時，因次分析(dimensional analysis)原理的應用顯然有其必要性。因次分析的方法考慮理論方程式的無因次形式，由一組與資料相關的無因次參數，代表多項有因次的變數間的最簡化關係。所以，在資料的分析上，可以減少相關參數的數目，並可節省相當多的時間與成本。此分析方法目前亦已受到工程界相當的肯定。

本文首先以Burmister與Scriver的二層彈性理論之撓度方程式為基礎[2, 3]，利用因次分析的原理推導出影響該函數的主要無因次參數，並反覆驗證之。然後，再將該無因次參數的撓度函數關係式轉換成彈性模數回算的函數關係式，並確立面層撓度值與該函數的一對一關係。其次，再以此無因次參數，選定可能的範圍並建立資料庫。並根據此資料庫與最新的統計迴歸方法（投影追逐迴歸法，Projection Pursuit Regression, PPR）[4, 5] 建立預估方程式組，以便於各層彈性模數值的快速運算。

二、二層彈性理論之發展

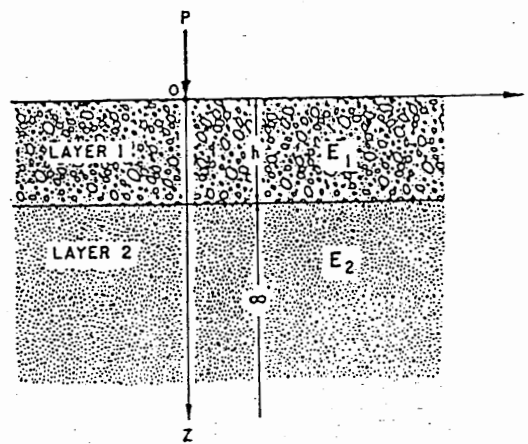
大家熟知的Boussinesq方程式是以一個集中荷重作用在單一的均勻土層，以解出應力和變位的問題。Burmister藉由荷重函數之貝索函數(Bessel Function)展開，對於一個相當於集中荷重作用在第一層表面之分佈力的任意疊加荷重，得到二層彈性系統中第一層表面的撓度方程式[2]。此系統是一垂直集中荷重 P ，作用在鋪面表面 O 點處，該點為圓柱座標 r 及 z 之原點， z 座標向下為正（如圖一所示）。兩層均假設為均質、等向性的線彈性材料，上層之彈性模數為 E_1 、厚度為 h ，下層之彈性模數為 E_2 、厚度則為無限，並假設兩層的柏松比皆為0.5。該撓度方程式為：

$$w = \frac{15P}{2\pi E_1} \int_0^{\infty} \left[\frac{e^{2mh} + 4Nmh - N^2 e^{-2mh}}{e^{2mh} - 2N(1 + 2m^2 h^2) + N^2 e^{-2mh}} \right] J_0(mr) dm \quad (E. 1)$$

$$N = \frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2} = \frac{1 - E_2 / E_1}{1 + E_2 / E_1}$$

其中：

- P = 作用於鋪面表面的垂直力，[F]。
 h = 上層的厚度，[L]。
 E_1 = 上層的彈性模數，[FL⁻²]。
 E_2 = 下層的彈性模數，[FL⁻²]。
 w = 鋪面表面的垂直撓度，[L]。
 r, z = 圓柱座標（ r = 水平方向， z = 垂直方向），[L]。
 m = 參數。
 $J_0(x)$ = 第一類的零階貝索函數。
 N = E_1 和 E_2 的函數。
 其中 [F]、[L]代表力與長度之單位。



圖一 點荷重作用在二層彈性系統的表面上 [3]

Burmister再據此推導出二層彈性系統在圓形均佈荷重作用下中心點之撓度方程式。依因次分析的原理，該撓度方程式可簡化為：

$$w_c = \frac{1.5pa}{E_2} F_w \left(\frac{a}{h}, \frac{E_2}{E_1} \right) = \frac{1.5pa}{E_2} F_w \quad (E. 2)$$

其中：

- w_c = 荷重中心點下方的垂直撓度，[L]。
 p = 作用於鋪面表面的垂直均佈壓力，[FL⁻²]。
 a = 荷重半徑，[L]。
 F_w = a/h 和 E_2/E_1 的函數。

Scrivner 於 1973 年再針對動力撓度儀作用在鋪面一路基的二層彈性系統上做進一步的研究[3]。為了能由動力撓度儀所測得的表面撓度資料轉換成鋪面及路基的彈性模數，Scrivner 乃將路基以上的全部材料，假設統合成一種材料，而形成簡化的二層系統(如圖一)。由於荷重的面積小，Scrivner 乃以點集中荷重的型式模擬上述之均佈荷重，以簡化數學運算。在距離 O 點水平距離 r 處之表面撓度 w ，其與 h 、 P 、 E_1 、 E_2 之關係如下式：

$$\frac{4\pi E_1}{3P} wr = \int_{x=0}^{\infty} V * J_0(x) dx = F\left(\frac{E_2}{E_1}, \frac{r}{h}\right)$$

$$x = \frac{mr}{h}$$

$$V = \frac{1 + 4Nme^{-2m} - N^2e^{-4m}}{1 - 2N(1 + 2m^2)e^{-2m} + N^2e^{-4m}} \quad (E. 3)$$

其中， $V = m$ 和 N 的函數。

因此，若假設距動力撓度儀荷重中心 r_1 、 r_3 處之鋪面表面撓度各為 w_1 、 w_3 ，將之代入上述的表面撓度方程式，並將所得的二方程式相除可得：

$$\frac{w_1 r_1}{w_3 r_3} = \frac{F_1\left(\frac{E_2}{E_1}, \frac{r_1}{h}\right)}{F_3\left(\frac{E_2}{E_1}, \frac{r_3}{h}\right)} = G\left(\frac{E_2}{E_1}, \frac{r_1}{h}, \frac{r_3}{h}\right) \quad (E. 4)$$

其中， F_1 、 F_3 、 G 為 E_2/E_1 、 r_1/h 和 r_3/h 的函數。若選定一非破壞撓度量測儀器(如動力撓度儀)，且 r_1 、 r_3 和面層厚度 h 為已知，則由方程式(E. 4)中可知， $w_1 r_1 / w_3 r_3$ 僅是彈性模數比 E_2/E_1 的函數。因此，配合ELASTIC MODULUS II程式之應用，通常在某一精確度的要求下，可利用試誤法的收斂過程得到一個滿足前述方程式的解。再將所得 E_2/E_1 的值代回式(E. 3)中，可解得 E_1 值，而 E_2 之值可由 $E_2 = E_1 * (E_2/E_1)$ 式中求得。

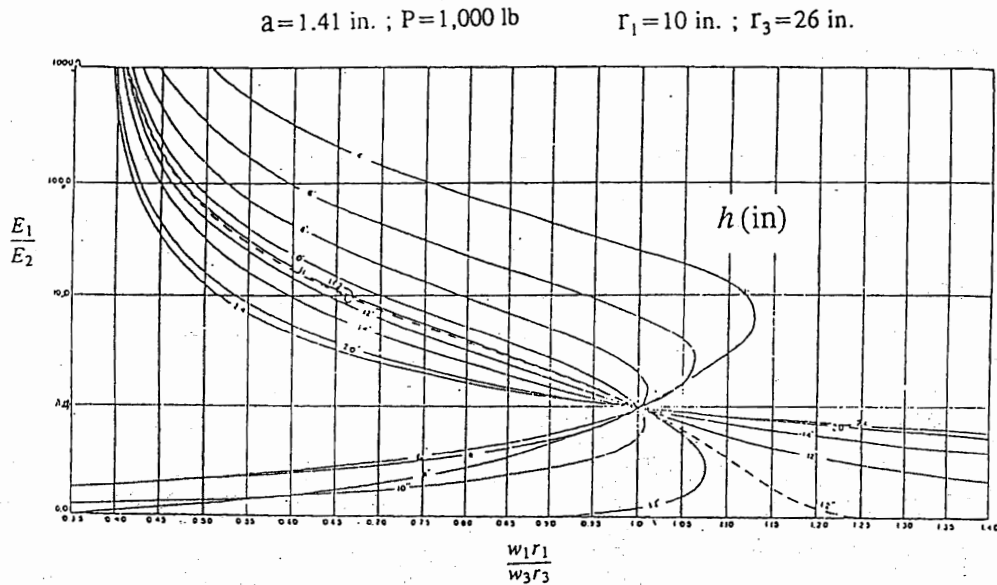
三、回算程式之基本理論與限制

回算法的基本原理是利用鋪面理論(如多層彈性理論與版理論)，由量測的面層撓度值回算鋪面各層材料的彈性模數。較常用的鋪面理論分析模式，是利用Odemark的等值厚度公式簡化的多層彈性理論[6]。鋪面材料模式基本上是假設均質、等向性、和線彈性，通常此與材料的真實狀況並不盡符合。因此，選用分析模式時，需注意其基本假設與限制。

一般回算程式的基本假設為：當鋪面受到動力載重作用時，經由鋪面理論計算之撓度值與實際量測的撓度值相同時，存在唯一的一組彈性模數組合。因此，在各層厚度、荷重大小、荷重面積和柏松比已知的情況下，可先假設一組彈性模數組合並代入鋪面理論中計算出一組理論撓度值，再比較此一理論撓度值與實際量測撓度值之差異。如果兩者之誤差不在設定之容許範圍內，則須改變另一彈性模數組合，再重複前述之計算步驟。直到有一組彈性模數組合的撓度誤差在限定範圍內，則將此組彈性模數值視為該鋪面之各層結構強度。

由回算的基本原理亦可發現，對於一組實測撓度值會有無限多的彈性模數組合所計算的理論撓度值與實測撓度值的誤差在設定的誤差範圍內。以Scriver的研究為例，Scriver針對動力撓度儀的配置，在荷重面積半徑 a 及感應器位置 r_1 、 r_3 固定的狀況下，建立彈性模數回算的資料庫與曲線圖。如圖二之 $w_1 r_1 / w_3 r_3$ 對彈性模數比 E_1/E_2 的厚度曲線圖，Scriver並以 $w_1 r_1 / w_3 r_3 = 1$ 及 $h = 11.2$ in.為分區，將該圖分成四個部份討論。圖中可知，厚度大於11.2 in.的兩個部份有唯一解；而厚度小於11.2 in.的部份則是有兩組解或無解[3]。因此，在回算的

基本理論考量下，從量測之撓度值回算出彈性模數值的解可能不唯一。而此項最基本的理論限制，卻往往被傳統的回算程式所忽略。(1 in. = 2.54 cm)



圖二 Scriver 針對動力撓度儀所建立之鋪面厚度曲線圖 [3]

由於傳統的回算法，必須經由多次反覆運算使計算出之理論撓度值與實測撓度值的誤差在容許範圍內，以推估出各層材料之彈性模數值。然而，回算程式中各層彈性模數值範圍的輸入與誤差範圍的設定，對回算結果的正確性影響甚大。一般而言，若彈性模數值範圍設定過大，則回算結果較不理想，而且反覆運算次數可能會增加並使計算時間加長。另一方面，如果彈性模數值範圍設定過小，以致於真正的解不在其中，則可能得到設定範圍的邊界值而非所求之正確值。此外，若再加上覆算次數之限制（或不足）以至無法收斂，則所得回算結果的正確性必然大受影響。因此，選擇適合的分析模式並減少對輸入值的猜測，將有助於得到較合理的回算結果。

四、無因次參數之選定及驗證

Scriver 只針對動力撓度儀的配置，在荷重面積半徑 a 及感應器位置 r_1 、 r_3 固定的狀況下，建立彈性模數回算的資料庫與曲線圖（如圖二）。若針對不同的撓度量測儀器，則荷重面積之半徑 a 及撓度量測位置 r_1 、 r_3 等參數均會變動，如道路評審儀之 $a = 9$ in.， $r = 0$ 、12、24、36、48 in.；衝擊荷重撓度儀之 $a = 5.9$ in.， $r = 0$ 、8、12、18、24、36、60 in.。因此，必須考慮加入 a 、 r_1 、 r_3 等參數於函數關係式中，以建立新的彈性模數回算曲線圖。因此，根據 Burmister 及 Scriver 所提出的理論推導，可推估出如下之函數關係：(1 in. = 2.54 cm)

$$Y = \frac{4\pi E_1}{3P} w_1 r_1 = F \left(\frac{E_2}{E_1}, \frac{r_1}{h}, \frac{h}{a} \right) \quad (E. 5)$$

$$\frac{w_1 r_1}{w_3 r_3} = F \left(\frac{E_2}{E_1}, \frac{r_1}{h}, \frac{r_3}{h}, \frac{h}{a} \right) \quad (E. 6)$$

由一系列的BISAR程式 [7] 運算結果，亦可印證出上式之關係：亦即僅有 E_1/E_2 、 r_1/h 、 r_3/h 及 h/a 四個無因次參數與 w_1r_1/w_3r_3 是相關的。簡而言之，當此四個無因次參數固定時，不管 E_1 、 E_2 、 r_1 、 r_3 、 h 、 a 之值如何變化，都不會影響 w_1r_1/w_3r_3 的值。較詳細的驗證結果，請參閱參考文獻 [1]。

五、回算資料庫之建立

設定式(E. 6)中之無因次參數 E_1/E_2 、 r_1/h 、 r_3/h 及 h/a 之數值範圍，可建立一基本回算資料庫。因為 w_1r_1/w_3r_3 只與上述四個參數相關，固定四個參數值， w_1r_1/w_3r_3 即不受影響。所以每一組參數只需取適當之 E_1 、 E_2 、 r_1 、 r_3 、 h 、及 a 之值（須滿足參數之值），代入BISAR程式 [7] 計算得該組之 w_1 及 w_3 ，可得 w_1r_1/w_3r_3 之值。

此外，在有限的資源限制下，分析用之資料庫的規模不能太大，而且也必須兼顧廣泛的代表性。因此，本研究僅考慮鋪面和路基的彈性模數之可能大小，以決定 E_1/E_2 的範圍。並考慮一般常用之非破壞性撓度量測儀器之荷重面積與感應器位置，以及第一層厚度，以建立 r_1/h 、 r_3/h 及 h/a 之數值範圍。

在考慮一般 E_1 、 E_2 、 h 、 a 、 r_1 及 r_3 之可能大小範圍下，假設 $P = 2,400 \text{ lb}$ 、 $E_2 = 1,000 \text{ psi}$ 、 $h = 10 \text{ in.}$ ，選擇無因次參數 E_1/E_2 、 r_1/h 、 r_3/h 及 h/a 之數值範圍如下：（其中，並選定 $r_1 > r_3$ 以減少不必要的重複運算，故總共可得1680組資料。1 lb=0.454 kg, 1 psi=0.07 kg/cm², 1 in.=2.54 cm）

$$E_1/E_2 = 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500, 1000, 2000, 5000$$

$$r_1/h = 0.8, 1.2, 1.8, 2.4, 3.6, 4.8, 6.0$$

$$r_3/h = 1.2, 1.8, 2.4, 3.6, 4.8, 6.0, 7.2$$

$$h/a = 0.8, 1.3, 2.5, 3.5, 5.0$$

各無因次參數之值選定後，即以FORTRAN語言寫成資料整理及擷取的程式。自行撰寫之程式共分兩部份：第一部份是建立參數資料庫及BISAR程式之輸入檔；第二部份則是由BISAR程式之輸出檔擷取程式算出之撓度值，再與參數資料庫合併建立成資料庫。本研究利用程式來擷取所需資料及建立資料庫，除可避免人為誤差外，也方便資料庫之修改與建立。

六、非線性預估模式組之建立

6.1 投影追逐迴歸分析法之介紹

Friedman和Stuetzle在1981年所發展的投影追逐迴歸法(Projection Pursuit Regression, PPR) [4, 8] 是利用小區域平均的技術，將回應表面(y's)模擬成一系列各項預估變數(x's)的非參數性變數的投影函數之和。假設存在如下之真實模式：

$$y = \bar{y} + \sum_{m=1}^{M_0} \beta_m \phi_m(a_m^T x) + \varepsilon \quad (\text{E. 7})$$

其中， $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)^T$ 代表預估變數的向量。而 \bar{y} 是回應變數的期望值或平均值， β_m 是迴歸常數， ϵ 是隨機誤差。在概念上，投影追逐迴歸法是將預估變數 x 投影到方向向量 a_1, a_2, \dots, a_m 上，以得到其投影長度 $a_m^T x$ ，其中 $m = 1, \dots, M_0$ 。並利用最佳化之技巧，以找到可以模擬多維回應表面的最佳非線性轉換函數 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ 之組合。而 $\phi_m(a_m^T x)$ 係代表估計投影長度的未知非參數性的轉換函數。換言之，回應表面將被分成一系列平均投影項加在一起的總和。其中，第一投影項 ϕ_1 可代表參數空間上的主要趨勢，而其與回應表面值之差（或殘餘值）則成為其他投影項的來源。

經由投影追逐迴歸分析法的輔助，可將多維空間上之回應表面轉換為可以二維曲線圖形表示的平均投影曲線的和。此後，再利用傳統的線性迴歸方式，以求得符合投影曲線的方程式組。本研究採用如上所述之二階段迴歸分析方式[5]，以協助找尋較符合多維回應表面的正確的函數型式。在分析的過程中，亦能輕易地經由目視查證或與主題有關的工程知識，選擇合理的函數型式及適用的邊界條件，以模擬個別的投影曲線。

6.2 預估方程式組之建立

由前述二層彈性理論與因次分析的結果中可知，若欲藉由式(E. 6)推導出如公式(E. 8)中 E_1/E_2 與無因次參數 $w_1 r_1 / w_3 r_3, r_1/h, r_3/h$ 及 h/a 間之回算關係式，其解可能亦不唯一（亦即某些部份可能有唯一解、兩組解、或無解）。

$$\frac{E_2}{E_1} = G\left(\frac{w_1 r_1}{w_3 r_3}, \frac{r_1}{h}, \frac{r_3}{h}, \frac{h}{a}\right) \quad (\text{E. 8})$$

因此，本文擬以 $E_1/E_2 = 1$ 和 $w_1 r_1 / w_3 r_3 = 1$ 為分區，並僅就『 $E_1/E_2 > 1$ 和 $w_1 r_1 / w_3 r_3 \leq 1$ 』的部份，提出較深入的研究（注意，此與Scrivner以往的分區圖不同）。本分區內曲線之一對一的關係，亦可由Scrivner的分區圖（如圖二）中很明顯地確立出來。並進而針對此部份的資料，利用S-PLUS統計軟體 [8] 及前述之二階段迴歸分析方式，將此五度空間的函數關係模擬成爲一非線性函數的預估方程式組。

由於變數 E_1/E_2 的範圍甚大，故在統計迴歸的分析過程中必須取此變數的對數函數做爲回應變數，以減少迴歸分析上的困難。經由數十次詳細的投影追逐迴歸分析結果，最後選定如下之最佳預估方程式組，以模擬此五度空間的函數分區：

$$\log_{10}\left(\frac{E_1}{E_2}\right) = 2.283 + 0.948 \Phi_1 + 0.514 \Phi_2 + 0.253 \Phi_3$$

$$\Phi_1 = \begin{cases} 0.864 + 16.373(A1) + 56.154(A1)^2 + 101.2(A1)^3 + 65.23(A1)^4 & \text{if } A1 \leq -0.05 \\ 1.637 + 72.73(A1) + 2056.2(A1)^2 + 35709.4(A1)^3 + 242630.6(A1)^4 & \text{if } -0.05 < A1 \end{cases}$$

$$\Phi_2 = \begin{cases} -2.006 + 1.388(A2) - 0.146(A2)^2 + 0.083(A2)^3 - 0.024(A2)^4 & \text{if } A2 \leq 3.0 \\ 10.388 - 9.964(A2) + 3.759(A2)^2 - 0.590(A2)^3 + 0.034(A2)^4 & \text{if } 3.0 < A2 \end{cases}$$

$$\Phi_3 = \begin{cases} 20.760 + 46.171(A3) + 40.127(A3)^2 + 15.617(A3)^3 + 2.224(A3)^4 & \text{if } A3 \leq -1.5 \\ 0.488 - 1.031(A3) - 0.563(A3)^2 + 0.206(A3)^3 + 0.053(A3)^4 & \text{if } -1.5 < A3 \leq 0 \\ 0.462 - 0.841(A3) - 5.209(A3)^2 + 4.505(A3)^3 - 1.552(A3)^4 & \text{if } 0 < A3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
A1 &= -0.699x_1 + 0.00046x_2 - 0.00059x_3 + 0.00151x_4 + 0.715x_5 - 0.00013x_6 - 0.00003x_7 \\
A2 &= -0.419x_1 - 0.0864x_2 + 0.813x_3 + 0.167x_4 - 0.355x_5 - 0.0420x_6 + 0.0298x_7 \\
A3 &= 0.681x_1 - 0.0998x_2 + 0.383x_3 - 0.307x_4 + 0.534x_5 + 0.0153x_6 - 0.00084x_7
\end{aligned}$$

$$X = [x_1, x_2, \dots, x_7] = \left[\frac{w_1 r_1}{w_3 r_3}, \frac{h}{a}, \frac{r_1}{h}, \frac{r_3}{h}, \frac{r_1 * h}{h r_3}, \frac{r_1 * h}{h a}, \frac{r_3 * h}{h a} \right] \quad (E. 9)$$

Statistics: $N=1247, R^2=0.995, SEE=0.0645, CV=2.8\%$

Limits: $1 \leq E_1/E_2 \leq 5000, 0.8 \leq r_1/h \leq 6, 1.2 \leq r_3/h \leq 7.2,$
 $0.8 \leq h/a \leq 5.0, w_1 r_1/w_3 r_3 \leq 1, r_1 > r_3$

其中，N 代表資料數目， R^2 值為非線性預估方程式組之判定係數，SEE 為標準偏差，而 CV 為變異係數。原回算資料庫之參數範圍亦是此預估方程式組的限制範圍。須注意的是投影的次數愈多，雖然可使判定係數(R^2) 愈趨近於 1 並提高對資料的符合度，但同時也會增加方程式組的數目及複雜度。故預估方程式組的建立，必須在此中間取得一平衡點。同理，為求計算之方便，我們亦可利用前述建立預估模式的方法，將式(E. 5) 模擬成如下之近似式，以計算出各層彈性模數值。

$$\begin{aligned}
\log_{10}(Y) &= \log_{10} \left(\frac{4\pi E_1}{3P} w_1 r_1 \right) = 1.677 + 1.035 \Phi_1 + 0.0788 \Phi_2 \\
\Phi_1 &= \begin{cases} -1.625 + 0.801(A1) + 0.021(A1)^2 - 0.017(A1)^3 + 0.001(A1)^4 & \text{if } A1 \leq 2.5 \\ -2.654 + 2.017(A1) - 0.508(A1)^2 + 0.083(A1)^3 - 0.005(A1)^4 & \text{if } 2.5 < A1 \end{cases} \\
\Phi_2 &= \begin{cases} 0.301 + 1.701(A2) - 0.023(A2)^2 - 0.014(A2)^3 - 0.003(A2)^4 & \text{if } A2 \leq 0 \\ 0.295 + 1.149(A2) - 0.225(A2)^2 - 0.262(A2)^3 + 0.078(A2)^4 & \text{if } 0 < A2 \leq 2.5 \\ 1.845 - 0.316(A2) - 0.079(A2)^2 + 0.012(A2)^3 - 0.001(A2)^4 & \text{if } 2.5 < A2 \end{cases} \\
A1 &= 0.998x_1 + 0.0130x_2 - 0.0147x_3 + 0.0633x_4 - 0.00202x_5 \\
A2 &= -0.827x_1 - 0.107x_2 + 0.472x_3 + 0.284x_4 + 0.0303x_5 \\
X &= [x_1, x_2, \dots, x_5] = \left[\log_{10} \left(\frac{E_1}{E_2} \right), \frac{h}{a}, \frac{r_1}{h}, \log_{10} \left(\frac{E_1}{E_2} \right) * \frac{r_1}{h}, \frac{h * r_1}{a * h} \right] \quad (E. 10)
\end{aligned}$$

Statistics: $N=420, R^2=0.9989, SEE=0.03266, CV=1.95\%$

Limits: $1 \leq E_1/E_2 \leq 5000, 0.8 \leq r_1/h \leq 6, 0.8 \leq h/a \leq 5.0$

如此，我們可以利用式(E. 9)的預估方程式組推估出彈性模數比 E_1/E_2 的近似值，再將所得之 E_1/E_2 值代入式(E. 10)中，以求得上層彈性模數值 E_1 ，並計算出下層彈性模數值 E_2 。

七、預估模式組之驗證

本文所建立之預估方程式組，可由面層撓度值與其它相關資料直接計算二層彈性系統之彈性模數比，並進而計算出各層之彈性模數值。將運用此方式及 BISDEF 程式 [9] 回算所求得之彈性模數值與原假設已知之該組彈性模數值比較，以驗證其回算之精確度。茲將本文中初步建立的方程式組之應用實例及驗證過程敘述如下：

假設二層彈性系統的面層厚度 $h=10$ in.，荷重 $P=3,000$ lb，荷重盤半徑 $a=7.69$ in.，撓度量測位置 $r_1=36$ in. 和 $r_3=60$ in.，若設上層及下層之彈性模數值 $E_1=1,000,000$ psi， $E_2=5,000$ psi 為已知。由BISAR程式計算得其撓度值為 $w_1=0.00386$ in.， $w_3=0.0028$ in.。(1 lb=0.454 kg, 1 psi=0.07 kg/cm², 1 in.=2.54 cm)

現若假設上述之撓度值 w_1, w_3 為已知，而 E_1, E_2 為欲回算求得之未知彈性模數值。因此， $h/a=1.3$ ， $r_1/h=3.6$ ， $r_3/h=6.0$ ， $w_1r_1/w_3r_3=0.827$ 。將上述參數代入前述之預估方程式組中，可得 $A1=-0.14267$ ， $A2=3.28976$ ， $A3=0.35660$ ， $\phi_1=-0.59584$ ， $\phi_2=1.26694$ ， $\phi_3=-0.32111$ 。最後將以上結果代入式(E. 9)中，可得 $\log_{10}(E_1/E_2)=2.28826$ ，亦即 $E_1/E_2=194.20$ 。

同理，將此 E_1/E_2 值代入前述之另一預估方程式組中，可得 $A1=2.75956$ ， $A2=2.15223$ ， $\phi_1=0.49000$ ， $\phi_2=0.80058$ 。再將以上結果代入式(E. 10)中，可得 $\log_{10}(Y)=2.2475$ ，亦即是 $Y=176.8068$ 。因此，可計算出上層彈性模數值 $E_1=911,259$ psi，而下層之彈性模數值 $E_2=4,692$ psi。此運算之結果不僅與原假設值甚為相近，而且比傳統的回算程式(如BISDEF程式)更具有快速性與精確性。

八、結論與建議

一般回算程式必須輸入鋪面各層彈性模數值的範圍與起始值，而該彈性模數值範圍之設定，對於回算速度及回算結果之正確性有相當大的影響。此外，由回算的基本理論分析中得知，量測之面層撓度值所估算出之彈性模數值的解可能不唯一。此理論之嚴重限制在一般回算程式中均不予考慮，因此亦可能會影響回算結果之正確性甚巨。本文除了針對上述問題研究改進的方法，並融合資料庫回算法的理念與最新的統計迴歸方法，建立一個能由面層撓度值直接計算出各層彈性模數值的預估方程式組。

本文以無因次的參數及函數關係建立之資料庫及預估方程式組，比傳統的分析法更具代表性，所以適用範圍亦較廣。該預估方程式組不僅可免除反覆運算的時間，在面層撓度量測與彈性模數值回算的過程亦有了及時性。如此，不僅可免除反覆運算的時間，亦可在現場試驗中立即計算出各層之彈性模數值，必要時亦可重複該非破壞性撓度試驗，以確保所量測資料與回算之彈性模數值的正確性。此外，若有必要運用傳統回算程式時，該預估方程式組的可能預估誤差範圍亦可做為選定傳統回算程式中設定彈性模數值範圍的基本準則。

在時間與經費的雙重限制下，本文僅提出二層彈性系統的回算問題之初步研究。對於參數範圍之選定、資料庫的規模大小、預估方程式組的精確度、溫度之校估、甚至三層或三層以上之系統等問題，仍須待未來作更深入的研究。茲將改進之建議簡述如下：

1. 本文所推導出之無因次參數，可做為未來分析三層或三層以上系統之依據，並靈活擴展運用之。
2. 由於資料庫中之變數 E_1/E_2 的範圍甚大，故在前述的迴歸分析中必須取此變數的對數函數做為回應變數，以減少分析上的困難。因此，各層彈性模數之估算誤差亦可能成對數增長。所建立之非線性方程式組的預估結果經初步驗證有相當之正確性，然為提高預估方程式組的精確度，必要時可在迴歸分析時將資料庫做細部分區、慎選參數範圍、或增加非線性函數之投影項。但是，迴歸之投影項仍不宜增加過多，以免方程式組過於複雜，不利於計算。
3. 溫度校估在非破壞性撓度試驗分析鋪面結構強度的程序中，是非常重要的部份。尤其是國內最常用的瀝青材料，其材料性質受到溫度變化的影響極大。為使回算彈性模數

之結果合理，量測撓度時必須同時記錄量測溫度，並配合當地之溫度校估模式，以便將撓度值校估為設計時標準溫度下的撓度值，再回算得彈性模數值。

4. 若經由以上之深入研究改進，使所建立之預估方程式組更精確，且方程式更簡化，則有利於寫成程式以直接計算出各層之彈性模數值。此外，將該程式與非破壞性撓度量測儀器相結合，則可立即由現場量測撓度值得知鋪面之結構強度狀況。

致謝

本研究承蒙行政院國家科學委員會之經費贊助，特此致謝。研究期間蒙美國伊利諾大學Dr. K. T. Hall 與本所倪至寬博士提供許多寶貴意見與協助，在此並致上萬分之謝忱。

參考文獻

1. 陳建桓，「由鋪面撓度值回算鋪面彈性模數的理論研究」，淡江大學土木工程研究所運輸工程組碩士論文，淡水，台北，民國八十三年六月(1994)。
2. Burmister, D. M., "The Theory of Stresses and Displacements in Layered Systems and Applications to the Design of Airport Runways", Proceedings, Highway Research Board, Vol. 23, pp. 126-144 (1943).
3. Scrivner, F. H., C. H. Michalak, and W. M. Moore, "Calculation of the Elastic Moduli of a Two-Layer Pavement System from Measured Surface Deflection", Highway Research Record No. 431, Highway Research Board, Washington, D.C. (1973).
4. Friedman, J. H. and W. Stuetzle, "Projection Pursuit Regression," Journal of the American Statistical Association, Vol. 76, pp. 817-823 (1981).
5. Lee, Y. H., and M. I. Darter, "New Predictive Modeling Techniques for Pavements," Transportation Research Record 1449, Transportation Research Board, Washington, D.C., pp. 234-245 (1994).
6. Odemark, N., "Investigations as to the Elastic Properties of Soils and Design of Pavements According to the Theory of Elasticity," (in Swedish), Bulletin 77, State Highway Commission, Stockholm, Sweden=(1949). English Translated by M. A. Hibbs and J. Silfwerbrand and Edited by A. M. Ioannides (1989).
7. Shell Oil Co., "BISAR: Bitumen Structures Analysis in Roads, User's Manual," Koninklijke/Shell - Laboratorium, Shell Research N.V., Amsterdam (1978).
8. STATISTICAL Sciences, Inc., "S-PLUS for Windows," User's Manuals and Reference Manuals, Seattle, Washington (1993).
9. Bush, A. J., III, "Computer Program BISDEF," U. S. Army Corps of Engineers Waterways Experiment Station (1985).