

## 鐵路運輸重要性

- 自鐵路發明以來，在人類的運輸與人文發展的歷史上扮演著非常重要的角色。即使因為公路運輸取代了部份的功能，鐵路依然為現代運輸事業上有著重要的地位。以目前的運輸規劃，在城市間的中長程運輸仍適用於鐵路運輸，而在新興的都市所規劃的城市捷運系統，也較適用於擁有獨立路權的鐵路軌道系統。以此情形而言，鐵路運輸在目前的運輸系統中，仍然為一個重要的運輸工具。

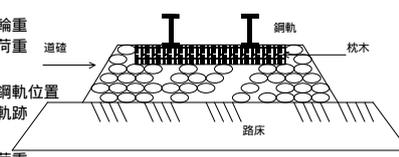
## 軌道設計之要求

- 強度足夠
- 確保車輛之安全圓滑行駛
- 避免軌道不整
- 良好的乘車舒適感
- 合乎經濟
- 保養維護簡易

## 傳統道碴式軌道構造(1)

- 傳統的軌道組成包括路床、道碴、枕木，鋼軌及附屬設備。
- 一般常使用傳統的軌道系統其構造是在壓實處理過的路基上，鋪上要求厚度的道碴，在道碴上設置規定間隔的枕木或混凝土枕，最後將兩條鋼軌以扣件及道釘等設備固定於枕木上。台鐵目前所使用的軌道系統主要即是以此一類型為主。

## 傳統道碴式軌道構造(2)

- 鋼軌
    - 承受輪重
    - 傳遞荷重
  - 扣件
    - 固定鋼軌位置
    - 確保軌跡
  - 軌枕
    - 傳遞荷重
    - 確保線形
    - 提供彈性
  - S 道碴
    - 傳遞荷重、固定軌枕位置、排水、彈性
- 

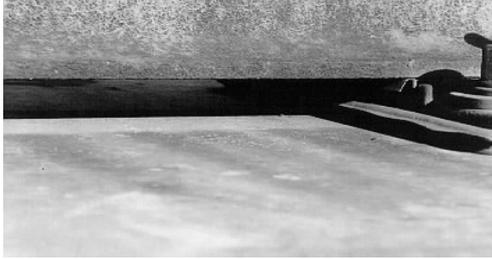
## 軌距

- 軌距分類
  - 寬軌
  - 標準軌\*\*\*1.435 m
  - 窄軌
- 量測方式
  - 頂面下1.588 cm處內側距離

## 扣件組成



## 扣件組成可提供彈性



## 道碴式軌道之缺點

- ◆ 結構強度易變弱
- ◆ 承載強度不足
- ◆ 需要頻繁之維修
- ◆ 維修成本高
- ◆ 維修材料短缺

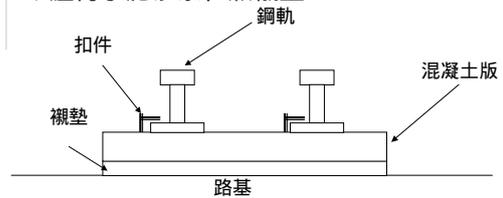


## 版式軌道

- ◆ 新式的軌道版(Slab Track) 又稱版式軌道。此軌道系統用有較佳的強度，在承載列車的重複載重下較不易產生較大的變形與破壞，不需要頻繁的維修作業，目前已由多個國家所採用，以此趨勢而言軌道版在未來鐵路的系統日益重要。

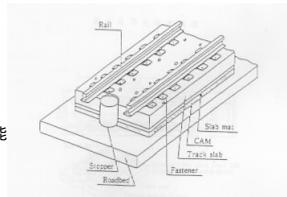
## 版式軌道之構造(1)

- ◆ 鋼軌、扣件、混凝土軌道版、路床
- ◆ 瀝青水泥砂漿、版襯墊



## 版式軌道之構造(2)

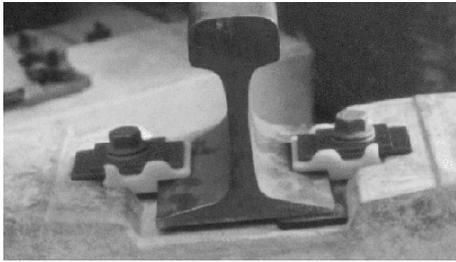
- ◆ 鋼軌
- ◆ 扣件
  - 固定鋼軌位置
  - 確保軌跡
  - 提供彈性
- ◆ 混凝土軌道版
  - 取代道碴與軌枕功能
- S 其他
  - 彈性襯墊
  - 防動塊



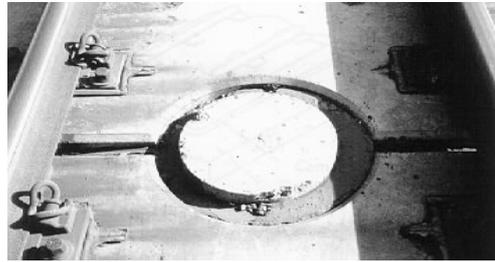
## 版式軌道與傳統軌道之比較

- ◆ 軌道結構方面
- ◆ 行車安全方面
- ◆ 維護施工方面
- ◆ 經濟考量方面

## 扣件組成



## 防動塊



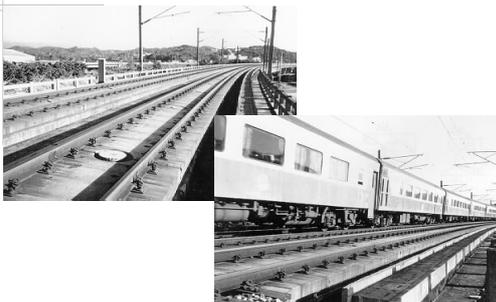
## 版式軌道發展背景

- ◆ 日本
  - € 1955 『新型軌道構造研究』
  - € 1971 『版式軌道研究會』
  - € 省工，省時，免保養，經濟，安全，耐用。
- ◆ 德國 RHEDA 系統
- ◆ 英國 The Paved Concrete Track System
- ◆ 法國 Stedef VSB系統
- ◆ 義大利 IPA系統

## 我國在軌道版之應用

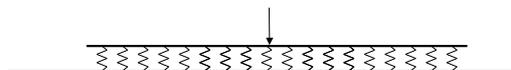
- ◆ 民國81年 南港溪高架橋(竹南至造橋)
  - € 版: 日式軌道版
  - € 扣件: 英式潘多爾(Pandrol)扣件
- ◆ 台北捷運部分路段

## 南港溪高架橋版式軌道



## 軌道彈性理論

- ◆ Timoshenko提出連續彈性支承樑(Continuous and Elastically Supported Beam)的理論，繼之以此一觀念 Westergaard與Talbot發展出分析軌道應力與應變的彈性理論。
- ◆ 軌道的應力應變計算法主要的理論基礎為彈性理論，是將軌道當成彈性體，將鋼軌假設成彈性連續樑置放在均部之彈性支承上



## 軌道彈性理論 2

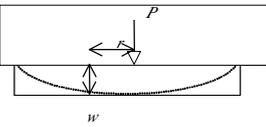
### Winkler 溫氏基礎

$p(x, y) = k y(x, y)$   
 $p =$  單位面積所受的力  $(kg/cm^2)$   
 $k =$  路床反力模數  $(kg/cm^3)$

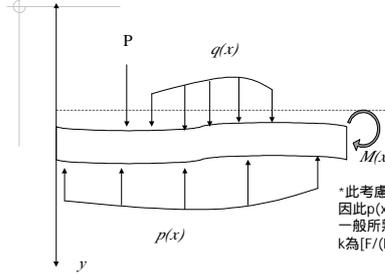
### 半無限空間

$$u(x, y) = \frac{P(1-\nu^2)}{4\pi E r}$$

$P$ : 集中載重     $\nu$ : 泊松比     $E$ : 土壤彈性模數     $r$ : 距荷重點之長度



## 彈性基礎上的樑



\* 此考慮有一個單位寬度=1, 因此  $p(x)$  單位變為  $[F/L^2]$ , 即一般所熟悉的均佈載重  $[F/L]$ ,  $k$  為  $[F/(L^2 \cdot 1)/L] = [F/L^2]$ .

## 樑的微分式

$$\frac{d}{dx} y(x) = v(x)$$

$$\frac{d}{dx} v(x) = -\frac{1}{EI} M(x)$$

$$\frac{d}{dx} M(x) = Q(x)$$

$$\frac{d}{dx} Q(x) = p(x) - q(x)$$

樑的撓曲方程式

$$\frac{d^4}{dx^4} y(x) = \frac{1}{EI} [q(x) - p(x)]$$

假設無均佈載重

$$\frac{d^4}{dx^4} y(x) = -\frac{1}{EI} p(x)$$

## 以溫氏模型求解

$$p(x) = k y(x)$$

$$\frac{d^4}{dx^4} y(x) = -\frac{k}{EI} y(x)$$

$$\text{Let } \frac{k}{EI} = 4S^4$$

$$\frac{d^4}{dx^4} y(x) + 4S^4 y(x) = 0$$

## 四次常微分齊次解

$$y(x) = A e^{Sx}$$

$$y'' + S^4 y = 0$$

$$A S^4 e^{Sx} + A S^4 e^{Sx} = 0$$

$$S^4 + S^4 = 0$$

解S

$$S = S \pm S i$$

$$S = -S \pm S i$$

$$y(x) = A_1 e^{(S+S i)x} + A_2 e^{(S-S i)x} + A_3 e^{(-S+S i)x} + A_4 e^{(-S-S i)x}$$

$$y(x) = e^{Sx} [(A_1 + A_2) \cos Sx + (A_1 - A_2) i \sin Sx] + e^{-Sx} [(A_3 + A_4) \cos Sx + (A_3 - A_4) i \sin Sx]$$

## 微分方程式求解

$$y(x) = e^{Sx} (B_1 \cos Sx + B_2 \sin Sx) + e^{-Sx} (B_3 \cos Sx + B_4 \sin Sx)$$

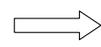
• Boundary Condition

$x = \text{無限大}$

$x=0$

$$y(x)=0$$

$$y'(x)=0$$



$$B_1=B_2=0$$

$$B_3=B_4=B$$

$$y(x) = B e^{-Sx} (\cos Sx + \sin Sx)$$

### 集中載重作用下的物理量

$$B = \frac{P}{8EIS^3}$$

$$y(x) = \frac{P}{8EIS^3} e^{-Sx} (\cos Sx + \sin Sx)$$

$$\theta(x) = -\frac{P}{4EIS^2} e^{-Sx} \sin Sx$$

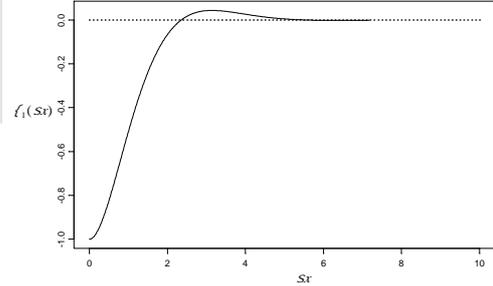
$$M(x) = \frac{P}{4S} e^{-Sx} (\cos Sx - \sin Sx)$$

$$Q(x) = -\frac{P}{2} e^{-Sx} \cos Sx$$

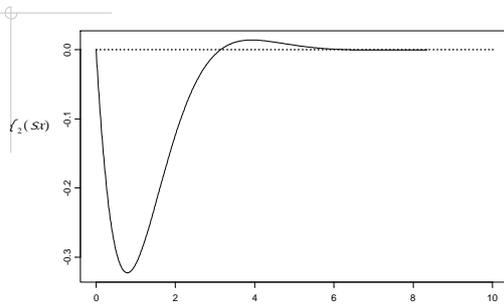
$$\begin{aligned} f_1(Sx) &= e^{-Sx} (\cos Sx + \sin Sx) \\ f_2(Sx) &= e^{-Sx} \sin Sx \\ f_3(Sx) &= e^{-Sx} (\cos Sx - \sin Sx) \\ f_4(Sx) &= e^{-Sx} \cos Sx \end{aligned}$$

齊姆曼函數

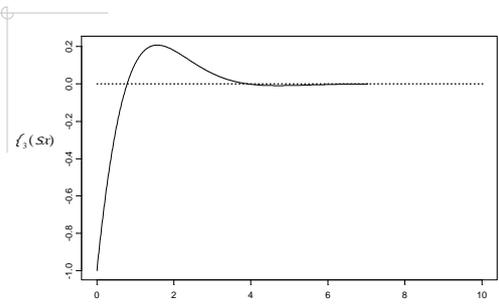
### 齊姆曼函數(無因次函數)



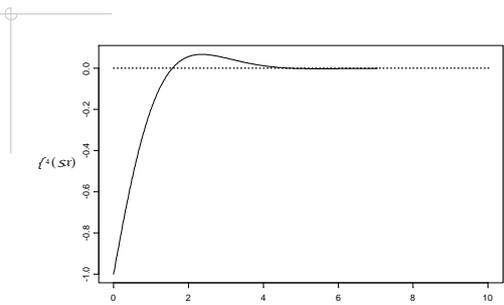
### 齊姆曼函數(無因次函數)



### 齊姆曼函數(無因次函數)



### 齊姆曼函數(無因次函數)



### 荷重作用點之各項物理量

$$y(x)_{x=0} = \frac{P}{8EIS^3}$$

$$\theta(x)_{x=0} = 0$$

$$M(x)_{x=0} = \frac{P}{4S}$$

$$Q(x)_{x=0} = -\frac{P}{2}$$

◆ 利用疊加原理(線性)可計算任意載重作用之物理量

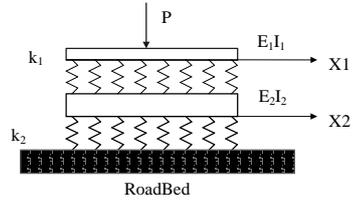
◆  $x$  超過  $2\pi/s$  可視作無限長

$$sr = 2f$$

$$x = \frac{2f}{s}$$

$$x = 2f * \sqrt{\frac{4EI}{k}}$$

## 雙重彈性樑



$E_1 I_1$  為上層樑的材料性質

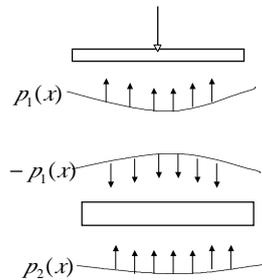
$E_2 I_2$  為下層樑的材料性質

$k_1$  與  $k_2$  分別代表上下樑的支承彈簧的反力模數

## 雙重彈性樑撓曲微分式

$$E_1 I_1 \frac{d^4 y_1}{dx^4} + p_1 = 0$$

$$E_2 I_2 \frac{d^4 y_2}{dx^4} + p_2 = p_1$$



## 雙重彈性樑溫氏基礎模式1

$$p_1 = k_1(y_1 - y_2)$$

$$p_2 = k_2 y_2$$

$$E_1 I_1 \frac{d^4 y_1}{dx^4} = -k_1(y_1 - y_2)$$

$$E_2 I_2 \frac{d^4 y_2}{dx^4} = k_1(y_1 - y_2) - k_2 y_2$$

## 雙重彈性樑溫氏基礎模式2

Let  $y_1 = Ae^{-\lambda x}$ ,  $y_2 = Be^{\lambda x}$   
 $r = \frac{k_1}{E_1 I_1}$ ,  $s = \frac{k_1}{E_2 I_2}$ ,  $\lambda = \frac{k_2}{E_2 I_2}$ ,  $\lambda = s + \lambda$

$$A \lambda^4 e^{-\lambda x} + r(Ae^{-\lambda x} - Be^{\lambda x}) = 0$$

$$B \lambda^4 e^{\lambda x} - sAe^{\lambda x} + \lambda Be^{\lambda x} = 0$$

Then  $\frac{B}{A} = \frac{\lambda^4 + r}{r} \implies (\lambda^4 + r)(\lambda^4 + s) = rs$   
 $\frac{B}{A} = \frac{s}{\lambda^4 + s}$

## 雙重彈性樑溫氏基礎模式3

Let  $\lambda^4 = \sim$   
 $(-r + \sim)(-s + \sim) = rs$   
 $\sim^2 + (r+s)\sim - rs = 0$   
 $\sim^2 + (r+s)\sim + r\lambda = 0$

$$\begin{cases} \sim_1 \\ \sim_2 \end{cases} = \frac{1}{2} \left\{ -(r+s+\lambda) \pm \sqrt{(r-s-\lambda)^2 + 4rs} \right\}$$

$$\begin{cases} \sim_1 \\ \sim_2 \end{cases} = \frac{1}{2} \left\{ -(r+s) \pm \sqrt{(r-s)^2 + 4rs} \right\}$$

### 雙重彈性樑溫氏基礎模式4

$$\therefore (r+)^2 > (r-)^2 + 4rs$$

$$b \begin{cases} u_1 < 0 \\ u_2 < 0 \end{cases}$$

$$\text{Let } / = \sqrt[4]{\frac{-r_1}{4}}, \quad \check{S} = \sqrt[4]{\frac{-r_2}{4}}$$

4組共軛複根

$$\begin{aligned} j^4 + 4 /^4 &= 0 & j &= (-1 \pm i) /, (-1 \pm i) \check{S}, (1 \pm i) /, (1 \pm i) \check{S} \\ j^4 + 4 \check{S}^4 &= 0 \end{aligned}$$

### 雙重彈性樑溫氏基礎模式通解

$$y_1 = A e^{jx} \quad j_{1-4} = (-1 \pm i) /, (-1 \pm i) \check{S}$$

$$y_1 = B e^{jx} \quad j_{5-8} = (1 \pm i) /, (1 \pm i) \check{S}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= A_1 e^{-jx} \cos /x + A_2 e^{-jx} \sin /x + A_3 e^{-\check{S}x} \cos \check{S}x + A_4 e^{-\check{S}x} \sin \check{S}x \\ &\quad + A_5 e^{jx} \cos /x + A_6 e^{jx} \sin /x + A_7 e^{\check{S}x} \cos \check{S}x + A_8 e^{\check{S}x} \sin \check{S}x \\ y_2 &= B_1 e^{-jx} \cos /x + B_2 e^{-jx} \sin /x + B_3 e^{-\check{S}x} \cos \check{S}x + B_4 e^{-\check{S}x} \sin \check{S}x \\ &\quad + B_5 e^{jx} \cos /x + B_6 e^{jx} \sin /x + B_7 e^{\check{S}x} \cos \check{S}x + B_8 e^{\check{S}x} \sin \check{S}x \end{aligned}$$

### 無限延長或半無限長的通解1

當x趨近於無限大時y1, y2=0

Then A5, A6, A7, A8, B5, B6, B7, B8=0

$$y_1 = A_1 e^{-jx} \cos /x + A_2 e^{-jx} \sin /x + A_3 e^{-\check{S}x} \cos \check{S}x + A_4 e^{-\check{S}x} \sin \check{S}x$$

$$y_2 = B_1 e^{-jx} \cos /x + B_2 e^{-jx} \sin /x + B_3 e^{-\check{S}x} \cos \check{S}x + B_4 e^{-\check{S}x} \sin \check{S}x$$

$$\therefore \frac{B_1}{A_1} = \frac{j+r}{r} = \frac{S}{j+r} \text{ 且 } - = j \quad \therefore \begin{cases} \frac{B_1}{A_1} = \frac{B_2}{A_2} = \frac{B_3}{A_3} = \frac{B_4}{A_4} = \frac{-1+r}{r} = c \\ \frac{B_5}{A_5} = \frac{B_6}{A_6} = \frac{B_7}{A_7} = \frac{B_8}{A_8} = \frac{-1+r}{r} = y \end{cases}$$

### 無限延長或半無限長的通解2

帶入齊姆曼函數

$$\begin{cases} \ell_1(\check{S}x) = e^{-\check{S}x} (\cos \check{S}x + \sin \check{S}x) & \ell_1(/x) = e^{-jx} (\cos /x + \sin /x) \\ \ell_2(\check{S}x) = e^{-\check{S}x} \sin \check{S}x & \ell_2(/x) = e^{-jx} \sin /x \\ \ell_3(\check{S}x) = e^{-\check{S}x} (\cos \check{S}x - \sin \check{S}x) & \ell_3(/x) = e^{-jx} (\cos /x - \sin /x) \\ \ell_4(\check{S}x) = e^{-\check{S}x} \cos \check{S}x & \ell_4(/x) = e^{-jx} \cos /x \end{cases}$$

$$y_1 = A_1 \ell_4(/x) + A_2 \ell_2(/x) + A_3 \ell_4(\check{S}x) + A_4 \ell_2(\check{S}x)$$

$$y_2 = c A_1 \ell_4(/x) + c A_2 \ell_2(/x) + y A_3 \ell_4(\check{S}x) + y A_4 \ell_2(\check{S}x)$$

### 無限延長或半無限長的通解3

轉角

$$\theta_1 = -/A_1 \ell_1(/x) + /A_2 \ell_3(/x) - \check{S}A_3 \ell_1(\check{S}x) + \check{S}A_4 \ell_3(\check{S}x)$$

$$\theta_2 = -/c A_1 \ell_4(/x) + /c A_2 \ell_2(/x) - \check{S}y A_3 \ell_1(\check{S}x) + \check{S}y A_4 \ell_3(\check{S}x)$$

彎矩

$$M_1 = -2E_1 I_1 \left[ /^2 A_1 \ell_2(/x) - /^2 A_2 \ell_4(/x) + \check{S}^3 A_3 \ell_2(\check{S}x) - \check{S}^3 A_4 \ell_4(\check{S}x) \right]$$

$$M_2 = -2E_2 I_2 \left[ /^2 c A_1 \ell_2(/x) - /^2 c A_2 \ell_4(/x) + \check{S}^3 y A_3 \ell_2(\check{S}x) - \check{S}^3 y A_4 \ell_4(\check{S}x) \right]$$

剪力

$$Q_1 = -2E_1 I_1 \left[ /^3 A_1 \ell_3(/x) + /^3 A_2 \ell_1(/x) + \check{S}^3 A_3 \ell_3(\check{S}x) + \check{S}^3 A_4 \ell_1(\check{S}x) \right]$$

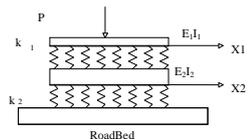
$$Q_2 = -2E_2 I_2 \left[ /^3 c A_1 \ell_3(/x) + /^3 c A_2 \ell_1(/x) + \check{S}^3 y A_3 \ell_3(\check{S}x) + \check{S}^3 y A_4 \ell_1(\check{S}x) \right]$$

### 集中載重作用下的物理量 1

When x=0

$$\frac{dy_1}{dx} = 0 \quad \frac{dy_2}{dx} = 0$$

$$2E_1 I_1 \frac{d^3 y_1}{dx^3} = P \quad \frac{d^3 y_2}{dx^3} = 0$$



$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -/ & / & -\check{S} & \check{S}^{-1} \\ -/c & /c & -\check{S}y & \check{S}y \\ /^3 & /^3 & \check{S}^3 & \check{S}^3 \\ /^3 c & /^3 c & \check{S}^3 y & \check{S}^3 y \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \\ 4E_1 I_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## 集中載重作用下的物理量 2

Let  $\frac{y}{\zeta} = \nu$

$$A_1 = A_2 = \frac{\nu}{\zeta^3} \cdot \dots^*$$

$$A_3 = A_4 = -\frac{1}{\zeta^3} \cdot \dots^*$$

$$\dots^* = \frac{1}{4(\nu-1)} \cdot \frac{P}{2E_1I_1}$$

## 集中載重作用下的物理量 3

位移

$$y_1 = \left[ \frac{\nu}{\zeta^3} \zeta_1 (/x) - \frac{1}{\zeta^3} \zeta_1 (\zeta x) \right] \cdot \dots^*$$

$$y_2 = y \left[ \frac{1}{\zeta^3} \zeta_1 (/x) - \frac{1}{\zeta^3} \zeta_1 (\zeta x) \right] \cdot \dots^*$$

轉角

$$r_1 = 2 \cdot \left[ -\frac{\nu}{\zeta^2} \zeta_2 (/x) + \frac{1}{\zeta^2} \zeta_2 (\zeta x) \right] \cdot \dots^*$$

$$r_2 = 2y \cdot \left[ -\frac{1}{\zeta^2} \zeta_2 (/x) + \frac{1}{\zeta^2} \zeta_2 (\zeta x) \right] \cdot \dots^*$$

## 集中載重作用下的物理量 4

剪力

$$Q_1 = -4E_1I_1 \cdot \left[ \nu \zeta_4 (/x) - \zeta_4 (\zeta x) \right] \cdot \dots^*$$

$$Q_2 = -4E_2I_2y \cdot \left[ \zeta_4 (/x) - \zeta_4 (\zeta x) \right] \cdot \dots^*$$

彎矩

$$M_1 = -2E_1I_1 \cdot \left[ -\frac{\nu}{\zeta} \zeta_3 (/x) + \frac{1}{\zeta} \zeta_3 (\zeta x) \right] \cdot \dots^*$$

$$M_2 = -2E_2I_2y \cdot \left[ -\frac{1}{\zeta} \zeta_3 (/x) + \frac{1}{\zeta} \zeta_3 (\zeta x) \right] \cdot \dots^*$$

## 荷重作用點之各項物理量

$$y_1 = \left[ \frac{\nu}{\zeta^3} - \frac{1}{\zeta^3} \right] \cdot \dots^* \quad r_1 = 0$$

$$y_2 = y \left[ \frac{1}{\zeta^3} - \frac{1}{\zeta^3} \right] \cdot \dots^* \quad r_2 = 0$$

$$M_1 = -2E_1I_1 \cdot \left[ -\frac{\nu}{\zeta} + \frac{1}{\zeta} \right] \cdot \dots^*$$

$$M_2 = -2E_2I_2y \cdot \left[ -\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta} \right] \cdot \dots^* \quad Q_1 = -4E_1I_1 \cdot [\nu - 1] \cdot \dots^*$$

$$Q_2 = 0$$

## 雙重彈性樑範例範例

### ◆ 日本東北新幹線軌道版

混凝土版彈性模數	: $E_c = 1.4E+05 \text{ kg/cm}^2$
混凝土版斷面	: $I = bh^3/12 = 133750 \text{ cm}^4$ ( $b=234\text{cm}$ , $h=19\text{cm}$ ) <sub>0</sub>
鋼軌彈性模數	: $E_s = 2.1E+06 \text{ kg/cm}^2$
鋼軌斷面	: $I_s = bh^3/12 = 3015\text{cm}^4 \times 2$ (雙軌) ( $b=8\text{cm}$ , $h=16.54\text{cm}$ ) <sub>0</sub>
扣件彈性常數	: $K_1 = 60000 \text{ kg/cm}_0$
版下 k 值	: $k_2 = 100 \text{ kg/cm}^3$
假設扣件間距	: $a = 15.468\text{cm}_0$
鋼軌扣件 k 值	: $k_1 = K_1/a = 3879 \text{ kg/cm}^3$
集中載重 P	: $P = 25600\text{kg}$

◆ 結果請參照講義之表一

## 有限元素法 1

### ◆ 理論解

- € 理想條件的限制
- € 可應用範圍有限

### ◆ 有限元素法

- € 擴充理論解之不足
- € 可分析複雜之應力行為

## 有限元素法2

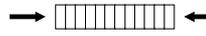
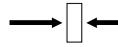
元素

$$[Q] = [k] \times [q]$$

結構

$$[K] = \sum [k]$$

$$[R] = [K] [r]$$



$$[U] = [d] \times [q]$$

$$[f] = [E] \times [U]$$

## 有限元素法範例

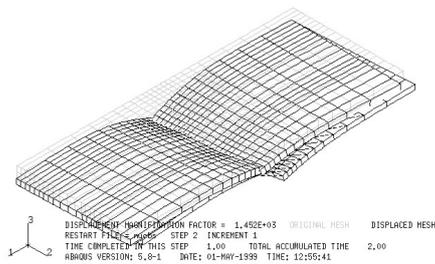
◆ 元素

- € 軌道版 : 固體元素
- € 鋼軌 : 樑元素
- € 扣件組 : 彈簧元素
- € 基礎 : 基礎元素

◆ 外力

- € 一對輪軸作用下

## 軌道版變形圖



## 軌道版應力分佈圖

