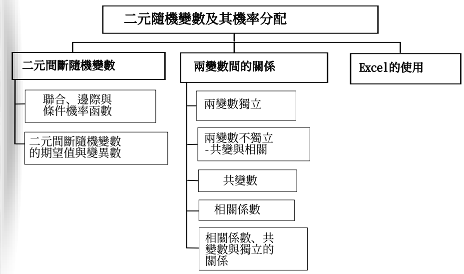
8　二元隨機變數及其機率分配

學習目的

1. 定義或了解二元間斷隨機變數與連續隨機變數的意義及其機率分配。
2. 了解邊際機率分配與條件機率分配。
3. 了解兩變數間的關係。
4. 了解二元隨機變數函數的期望值。
5. 了解多元隨機變數。

本章結構



二元間斷隨機變數

- **聯合機率函數**

設 X,Y 為二元間斷隨機變數，X 之值為 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，Y 之值為 $y_1,y_2,\cdots y_m$，若 $f(x_i,y_j)$ 滿足機率的二條件：

①$0\le f(x_i,y_j)\le 1$

②$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i,y_j)=1$

則 $f(x_i,y_j)$(簡單表示為 $f(x,y)$)為聯合機率函數。

二元間斷隨機變數

- **X 的邊際機率函數**

$$f_x(x)=\sum_y f(x,y)=f(x,y_1)+f(x,y_2)+\cdots+f(x,y_n)$$

上式必須滿足下列兩條件：

①$0\le f_x(x_i)\le 1$

②$\sum_{i=1}^{n} f_x(x_i)=1$

二元間斷隨機變數

- **Y 的邊際機率函數**

$$f_y(y)=\sum_x f(x,y)=f(x_1,y)+f(x_2,y)+\cdots+f(x_n,y)$$

上式必須滿足下列兩條件：

①$0\le f_y(y_j)\le 1$

②$\sum_{j=1}^{m} f_y(y_j)=1$

表8.1　X與Y的聯合機率分配與邊際機率分配表

$X\backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	y_m	$f_x(x_i)$
x_1	$f(x_1,y_1)$	$f(x_1,y_2)$	$\cdots$	$f(x_1,y_j)$	$\cdots$	$f(x_1,y_m)$	$f_x(x_1)$
x_2	$f(x_2,y_1)$	$f(x_2,y_2)$	$\cdots$	$f(x_2,y_j)$	$\cdots$	$f(x_2,y_m)$	$f_x(x_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	$f(x_i,y_1)$	$f(x_i,y_2)$	$\cdots$	$f(x_i,y_j)$	$\cdots$	$f(x_i,y_m)$	$f_x(x_i)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	$f(x_n,y_1)$	$f(x_n,y_2)$	$\cdots$	$f(x_n,y_j)$	$\cdots$	$f(x_n,y_m)$	$f_x(x_n)$
$f_y(y_j)$	$f_y(y_1)$	$f_y(y_2)$	$\cdots$	$f_y(y_j)$	$\cdots$	$f_y(y_m)$	1

二元間斷隨機變數

- **條件機率函數**

設 $f(x,y)$ 為二元機率函數，則在 $Y=y_j$ 條件下，發生 x_i 的條件機率表為：

$$f(x_i \mid Y=y_j)=\frac{f(x_i,y_j)}{f_y(y_j)}$$

在 $X=x_i$ 條件下，發生 y_j 的條件機率表為：

$$f(y_j \mid X=x_i)=\frac{f(x_i,y_j)}{f_x(x_i)}$$

表8.2 大慶通訊最新型手機的銷售資料

X（有否購買大哥大手機）	Y（是否看過型錄）0（未看過）	1（看過）	合計
0（不買）	1,200	480	1,680
1（購買）	240	480	720
合　計	1,440	960	2,400

表8.3 X與Y的聯合機率分配表

X（是否購買大哥大手機）	Y（是否看過型錄）0（未看過）	1（看過）	合計 $f_x(x)$
0（不買）	0.50	0.20	0.7
1（購買）	0.10	0.20	0.3
合計 $f_y(y)$	0.60	0.40	1.0

表8.4 $f(x_i \mid y_j)$ 的條件機率

X \ Y	$Y=0$（未看過）	$Y=1$（看過）
$X=0$（不買）	0.83	0.5
$X=1$（購買）	0.17	0.5

表8.5 $f(y_j \mid x_i)$ 的條件機率

Y \ X	$X=0$（不買）	$X=1$（購買）
$Y=0$（未看過）	0.71	0.33
$Y=1$（看過）	0.29	0.67

二元間斷隨機變數的期望值

- **X 的期望值**

$$E(X)=\sum_x\sum_y xf(x,y)$$
$$=\sum_x x\sum_y f(x,y)=\sum_x xf_x(x)$$

- **Y 的期望值**

$$E(Y)=\sum_x\sum_y yf(x,y)$$
$$=\sum_y y\sum_x f(x,y)=\sum_y yf_y(y)$$

二元間斷隨機變數的變異數

- X 的變異數

$$V(X)=\sum_x\sum_y(x-\mu_x)^2 f(x,y)$$
$$=\sum_x(x-\mu_x)^2 f_x(x)$$
$$=\sum_x x^2 f_x(x)-\mu_x^2 \qquad (8.7)$$

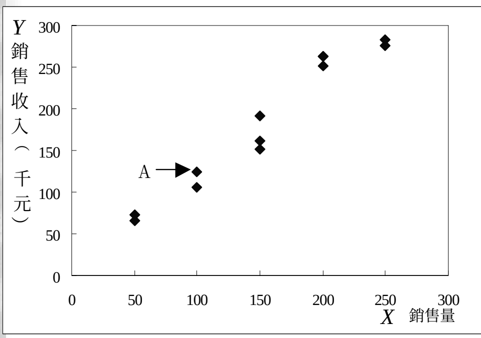
- Y 的變異數

$$V(Y)=\sum_x\sum_y(y-\mu_Y)^2 f(x,y)$$
$$=\sum_y(y-\mu_Y)^2 f_y(y)$$
$$=\sum_y y^2 f_y(y)-\mu_Y^2 \qquad (8.8)$$

表8.6 型錄發放量與銷售收入

	A	B	C
1	星期	型錄發放量 x	銷售收入 y
2	1	100	125,000
3	2	250	283,000
4	3	50	72,500
5	4	150	191,000
6	5	200	251,000
7	6	50	65,500
8	7	250	276,000
9	8	150	151,000
10	9	200	263,000
11	10	100	106,000
12	11	150	162,000
13	12	200	263,000

圖8.1 型錄發放量與銷售收入的散佈圖



兩變數間的關係

- **兩變數獨立的條件**

設 X,Y 為二元隨機變數，若 X 與 Y 之值均滿足下列任一條件，則 X,Y 獨立。

① $f(x,y)=f_x(x)\cdot f_y(y)$

② $f(x\mid y)=f_x(x)$

③ $f(y\mid x)=f_y(y)$

表8.7 多層次傳銷之地區別與福利措施統計表

X（公司所在地區）	Y（福利措施）0（無）	1（有）	合計
1（北部）	51	60	111
2（中部）	20	15	35
3（南部）	29	16	45
合計	100	91	191

資料來源：《中華民國八十九年台灣地區多層次傳銷事業經營概況調查報告》，行政院公平交易委員會，2001年6月。

表8.8 X 與 Y 的聯合機率分配表

X（公司所在地區）	Y（有無福利措施）0（無）	1（有）	合計 $f_x(x)$
1（北部）	0.27	0.31	0.58
2（中部）	0.10	0.08	0.18
3（南部）	0.15	0.09	0.24
合計 $f_y(y)$	0.52	0.48	1.00

兩變數間的關係

- **共變數**

$$Cov(X,Y) = E[X - \mu_x)(Y - \mu_y)]$$

圖8.2　*COV(X,Y)*的符號

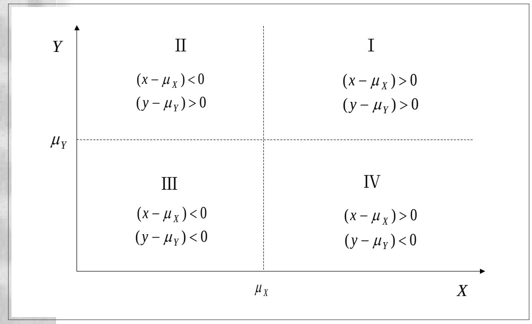


圖8.3 正向共變

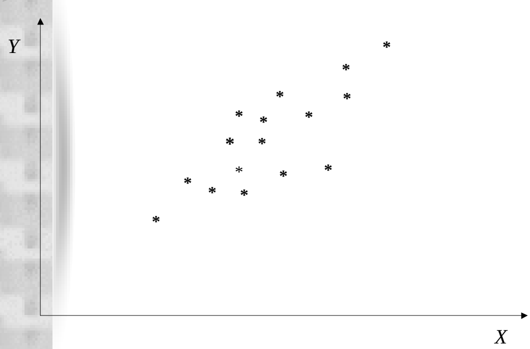


圖8.4 反向共變

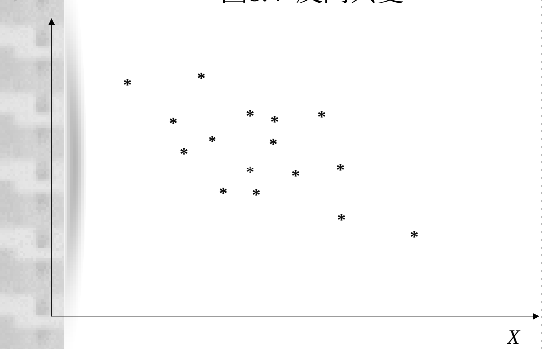


表8.10 看過型錄與購買手機之共變數

	A	B	C
1		看過型錄	購買手機
2	看過型錄	0.24	
3	購買手機	0.08	0.21

兩變數間的關係

- **相關係數**

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

式中：$Cov(X,Y)$為共變數，σ_X，σ_Y為標準差。

表8.10 看過型錄與購買手機之共變數

	A	B	C
1		看過型錄	購買手機
2	看過型錄	0.24	
3	購買手機	0.08	0.21