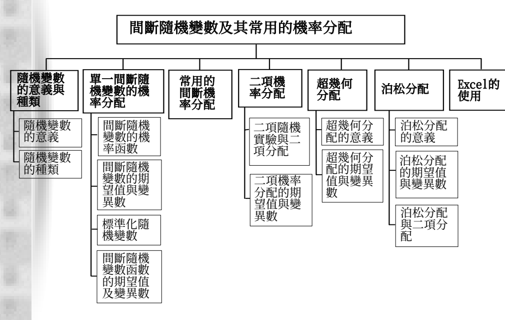
6 間斷隨機變數及其常用的機率分配

學習目的

1. 定義或了解隨機變數的意義及其機率分配。
2. 區分間斷隨機變數與連續隨機變數。
3. 計算間斷隨機變數的期望值、變異數及標準差。
4. 熟悉二項分配意義與特性，及其在日常生活上的應用。
5. 了解泊松分配的意義與特性，及其在日常生活上的應用。
6. 了解超幾何分配的意義與特性，及其在日常生活上的應用。
7. 比較泊松分配與二項分配。
8. 利用Excel求算各個分配並繪製圖形。

本章結構



隨機變數的意義與種類

隨機變數的意義

隨機變數是隨機實驗中對應樣本點的實數值函數。

隨機變數的種類

間斷隨機變數

隨機變數的變量其個數是有限的，或個數是無限但可數的稱為間斷或不連續隨機變數。

連續隨機變數

隨機變數的變量其個數為無限且不可數的稱為連續隨機變數。

圖6.1　隨機變數

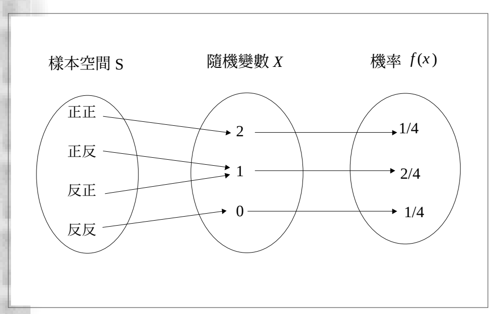


表6.3　間斷隨機變數

隨機實驗	隨機變數	隨機變數X 可能的值
1枚銅板擲2次	出現正面的次數	0,1,2
抽取 10 台印表機檢查品質	不良品的個數	0,1,2,⋯,10
購買手機的顧客的性別	性別	0為男性，1為女性
咖啡廳1天的顧客	顧客人數	0,1,2,⋯

表6.4　連續隨機變數

隨機實驗	隨機變數	隨機變數可能的值
觀察病人候診時間	等候時間	$x \geq 0$
抽取1個廠商的年營業收入	營業收入	$x \geq 0$
抽取1,250ml瓶裝汽水	汽水容量ml	$0 \leq x \leq 1,250$

單一間斷隨機變數的機率分配

- **意義**

  單一間斷隨機變數的機率分配是表示，一元間斷隨機變數的各個變量的發生機率(或相對次數)的分布情形，包括機率函數、期望值、變異數與標準差等。

- **機率函數**

  設間斷隨機變數X，其變量為$x_1,\cdots,x_n$，對應X的每一數值有唯一機率與之對應，該機率值表為$f(X=x_i)$或$f(x_i)$，並滿足下列兩個條件：

  ① $0 \le f(x_i) \le 1$

  ② $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$

  則$f(x)$為X之機率函數或稱機率分配。

表6.5 信用卡持有數

信用卡持有數x	相對次數
1	0.135
2	0.378
3	0.216
4	0.028
5	0.108
6	0.081
7	0.054

資料來源：根據 2000 年 11 月《突破》雜誌稍作修改（原資料僅有 7 張及 7 張以上的相對次數。）

單一間斷隨機變數的機率分配

- **累加機率函數**

  $$F(X=x_i)=F(x_i)=P(X \le x_i)=f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_i)$$

- **期望值**

  $$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)=\mu$$

  式中：X為間斷隨機變數，$f(x_i)$為機率函數。

- **變異數**

  $$V(X)=\sum_{i=1}^{n}\left[x_i-E(X)\right]^2 f(x_i) \quad 或 \quad V(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 f(x_i)$$

- **標準差**

  $$\sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 . f(x_i)}$$

表6.8 信用卡持有數的以下累加機率分配表

x 隨機變量	$f(x)$ 機率函數	$F(x)$ 累加機率
1	0.135	0.135
2	0.378	0.513
3	0.216	0.729
4	0.028	0.757
5	0.108	0.865
6	0.081	0.946
7	0.054	1.00
合計	1.000	

表6.12 信用卡的機率分配

	A	B	C	D	E
1	x	$f(x)$	$xf(x)$	x^2	$x^2 f(x)$
2	1	0.135	0.135	1	0.135
3	2	0.378	0.756	4	1.512
4	3	0.216	0.648	9	1.944
5	4	0.028	0.112	16	0.448
6	5	0.108	0.54	25	2.7
7	6	0.081	0.486	36	2.916
8	7	0.054	0.432	49	2.646
9	合計	$\sum f(x)=1$	$\sum xf(x)=3.055$		$\sum x^2 f(x)=12.301$

單一間斷隨機變數的機率分配

- **標準化變數(Z變數)**

  設X為一隨機變數，其平均數為μ，變異數為σ^2，令

  $$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$$

  則Z為一標準化變數。

表6.13　標準化隨機變數表

隨機變量 X	標準化變量 $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}=\dfrac{X-3.055}{1.723}$
1	-1.193
2	-0.612
3	-0.032
4	0.548
5	1.129
6	1.709
7	2.290

單一間斷隨機變數函數的期望值與變異數

❍隨機變數函數的期望值

設 X 為間斷隨機變數，其機率函數為 $f(x)$。令 $h(X)$ 為 X 的函數，則 $h(X)$ 的期望值表為 $E[h(X)]$ 或 $\mu_{h(x)}$：

$$E[h(X)]=\sum_x h(x)f(x) \tag{6.8}$$

❍隨機變數函數期望值的定理

設 C 為常數，$h(X)$ 為 X 的函數，則

① $E(C)=C$ (6.9)

② $E[C\cdot h(X)]=C\cdot E[h(X)]$ (6.10)

③ $E[h_1(X)+h_2(X)+\cdots+h_k(X)]=E[h_1(X)]+\cdots+E[h_k(X)]$ (6.11)

式中：$h_1(X),h_2(X),\cdots,h_k(X)$ 均為 X 的函數。

單一間斷隨機變數函數的期望值與變異數

❍隨機變數函數的變異數

設 X 為間斷隨機變數，其機率函數為 $f(x)$，令 $h(X)$ 為 X 的函數，則 $h(X)$ 的變異數為：

$$\sigma^2_{h(X)}=V[h(X)]=E[h(X)-E[h(X)]]^2 \tag{6.12}$$

單一間斷隨機變數函數的期望值與變異數

❍ 線性函數的期望值

設 $Y=a+bX$，則Y的期望值(平均數)為：

$E(Y)=E(a+bX)=a+bE(X)$

❍ 線性函數的變異數

設 $Y=a+bX$，則Y的變異數為：

$V(Y)=V(a+bX)=V(bX)=b^2V(X)$

二項機率分配

❍ 意義

設X為一間斷隨機變數，若 $f(x)$ 為：

$f(x)=C^n_x p^x q^{n-x}$　　　$x=0,1,2,\cdots,n$

則 $f(x)$ 為一二項機率分配。式中：$C^n_x=\dfrac{n!}{x!(n-x)!}$，$n$：試行次數，$x$：成功的次數，$p$：成功的機率，$q$：失敗的機率 $=1-p$

❍ 期望值

$E(X)=np$

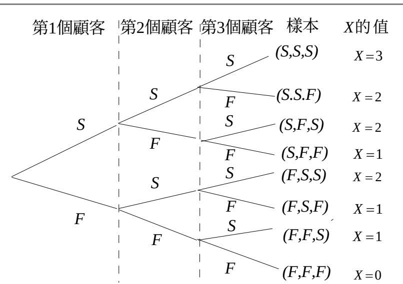
❍ 變異數

$V(X)=npq$

❍ 標準差

$\sigma=\sqrt{npq}$

圖6.4　二項隨機實驗的樹枝圖

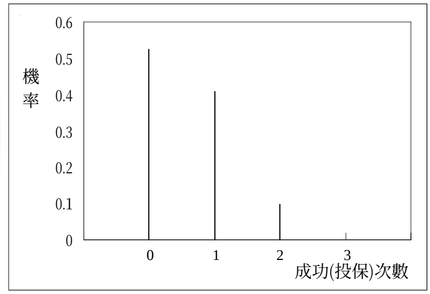


S:購買，F:不購買，X:購買人數。

表6.15 二項機率分配表

	A	B	C
1	x	$f(x)$	
2	0	0.512	
3	1	0.384	
4	2	0.096	
5	3	0.008	
6	合計	1	

圖6.6 二項機率分配圖



超幾何分配

- **超幾何分配**

$$f(x)=\frac{C_x^K C_{n-x}^{N-K}}{C_n^N} \qquad x=0,1,\cdots,n \qquad x\le K \qquad x\ge K+n-N$$

- **期望值**

$$E(X)=n\cdot\frac{K}{N}$$

- **變異數**

$$V(X)=n\cdot\frac{K}{N}\cdot\frac{N-K}{N}\cdot\frac{N-n}{N-1}$$

表6.22 超幾何實驗

$N=$ 母體元素總數	隨機抽取	$n=$ 樣本數
$K=$ 成功的次數	→	$x=$ 成功的次數
$N-K=$ 失敗的次數	抽出不放回	$n-x=$ 失敗的次數

Poisson(泊松)分配

- **泊松分配**

設已知在一定的區間發生事件A的期望值為λ， 令X為該區間發生事件的次數，則：

$$f(x)=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \qquad x=0,1,2,\cdots,\infty$$

此即為泊松分配，其參數為λ。

- **期望值**

$$E(X)=\lambda$$

- **變異數**

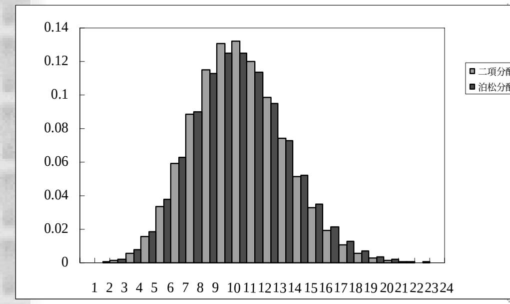
$$V(X)=\lambda$$

	A	B	C	D
1	x	$f(x)$		
2		$\lambda=2.4$	$\lambda=4.8$	
3	0	0.090718	0.008230	
4	1	0.217723	0.039503	
5	2	0.261268	0.094807	
6	3	0.209014	0.151691	
7	4	0.125408	0.182029	
8	5	0.060196	0.174748	
9	6	0.024078	0.139798	
10	7	0.008255	0.095862	
11	8	0.002477	0.057517	
12	9	0.000660	0.030676	
13	10	0.000159	0.014724	
14	11	0.000035	0.006425	
15	12	0.000007	0.002570	
16	13	0.000001	0.000949	
17	14	0.000000	0.000325	

表6.19 二項分配與泊松分配

	A	B	C	D
1	x	二項分配	泊松分配	B-C
2	0	2.65614E-05	4.53999E-05	-1.88385E-05
3	1	0.000295127	0.000453999	-0.000158873
4	2	0.001623197	0.002269996	-0.0006468
5	3	0.005891602	0.007566655	-0.001675052
6	4	0.015874596	0.018916637	-0.003042042
7	5	0.033865804	0.037833275	-0.003967471
8	6	0.059578729	0.063055458	-0.003476729
9	7	0.088895246	0.090079226	-0.001183979
10	8	0.114823027	0.112599032	0.002223994
11	9	0.130416277	0.125110036	0.005306241
12	10	0.131865347	0.125110036	0.006755311

圖6.17 二項分配與泊松分配



二元間斷隨機變數

- **聯合機率函數**

  設 X、Y 為間斷隨機變數，X 之值為 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，Y 之值為 $y_1, y_2, \cdots y_m$，則 $f(x, y)$ 為二元聯合機率函數。

- **X的邊際機率函數**

  $$f_x(x) = \sum_y f(x, y) = f(x, y_1) + f(x, y_2) + \cdots + f(x, y_n)$$

- **Y的邊際機率函數**

  $$f_y(y) = \sum_x f(x, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y) + \cdots + f(x_n, y)$$

- **條件機率函數**

  $$f(x_i \mid Y = y_i) = \frac{f(x_i, y_i)}{f_y(y_i)}$$

  在 $X = x_i$ 條件下，發生 y_i 的條件機率表為：

  $$f(y_i \mid X = x_i) = \frac{f(x_i, y_i)}{f_x(x_i)}$$