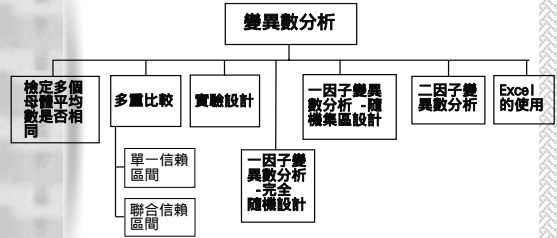


13 變異數分析

學習目的

1. 討論變異數分析的一般觀念，變異數分析的方法與步驟。
2. 學習檢定多個母體平均數是否相同。
3. 學習如何做多重比較。
4. 了解實驗設計的意義。
5. 學習一因子變異數分析-完全隨機設計方法。
6. 了解一因子變異數分析-隨機集區設計方法。
7. 學習二因子變異數分析的方法
8. 利用Excel統計軟體來做變異數分析

本章結構



變異數分析的意義

○ 變異數分析的意義

檢定三個或三個以上的母體平均數是否相等的統計方法，或檢定因子對依變數是否有影響的統計方法。

檢定多個母體平均數是否相同

變異數分析的步驟

- (1) 設立兩個假設
- (2) 選取 $\frac{MSF}{MSE}$ 為檢定統計量
- (3) 決定決策法則
- (4) 下結論

表13.1 可樂裝填機的測試結果

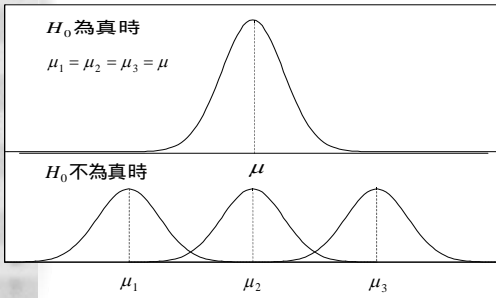
	A	B	C	D
1	樣本觀察值	廠牌A	廠牌B	廠牌C
2	1	106	107	100
3	2	80	112	104
4	3	104	115	95
5	4	110	104	100
6	5	90	117	106
7	樣本平均數	98	111	101
8	樣本變異數	158	29.5	18

變異數分析的假設

○ 變異數分析的假設

- ① 假設因子對依變數的影響效果是固定的。亦即 $\mu_i - \mu$ 為一常數而不是隨機變數。
- ② 每個小母體均為常態分配，表為： $Y_i \sim N(\mu, \sigma^2), i = 1, \dots, k$ 。
- ③ 變異數齊一性(Homogeneity)，即 $\sigma_i^2 = \sigma^2$ ，每個小母體的變異數均相等。
- ④ 抽樣方法為獨立簡單隨機抽樣，即自 k 個小母體分別抽取獨立之隨機樣本。

圖13.1 虛無假設與對立假設的關係



檢定多個母體平均數是否相同

○ 總變異

總變異 = 組間變異 + 隨機變異
 $SST = SSF + SSE$

○ 因子引起的變異(組間變異)

$$SSF = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 \quad \text{或} \quad SSF = \sum_{i=1}^k n_i ((\bar{Y}_i - \bar{Y})^2)$$

○ 隨機變異(組內變異)

$$SSE = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2 \quad \text{或} \quad SSE = \sum_{i=1}^k (n_i - 1) S_i^2$$

檢定多個母體平均數是否相同

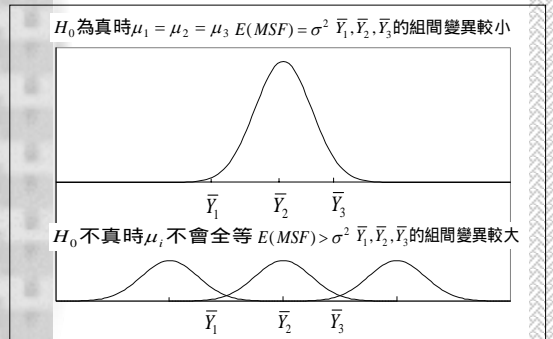
○ 因子變異數(平均變異)

$$MSF = \frac{SSF}{k-1}$$

○ 隨機變異數(平均變異)

$$MSE = \frac{SSE}{\sum n_i - k}$$

圖13.2 H_0 為真與不真的組間變異



檢定多個母體平均數是否相同

○ F檢定統計量

$$F = \frac{MSF}{MSE} \sim F_{k-1, \sum n_i - k}$$

○ 決策法則

- ① 若 $F > F_{k-1, \sum n_i - k, \alpha}$, 則拒絕 H_0 。
- ② 若 $F \leq F_{k-1, \sum n_i - k, \alpha}$, 則接受 H_0 。

表13.3 變異數分析表

變異來源	平方和 (SS)	自由度 (df)	平均平方和 (MS)	F
因子(組間)	SSF	k-1	$MSF = \frac{SSF}{k-1}$	$\frac{MSF}{MSE}$
隨機(組內)	SSE	$\sum n_i - k$	$MSE = \frac{SSE}{\sum n_i - k}$	
總和	SST	$\sum n_i - 1$		

表13.4 變異數分析表

變異來源	平方和 (SS)	自由度 (df)	平均平方和 (MS)	F 值
因子	463.33	2	231.66	3.38
隨機	822	12	68.5	
總和	1285.33	14		

圖13.4 可樂裝填機裝填數量的檢定

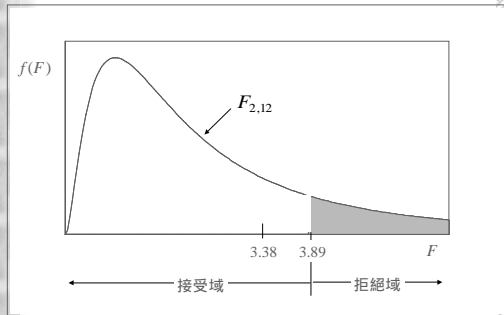


表13.5 可樂裝填機裝填量的變異數分析

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3	序號						
4	組	個數	總和	平均	變異數		
5	組A	5	460	90	158		
6	組B	5	555	111	19.5		
7	組C	5	505	101	19		
8							
9	ANOVA						
10	變源	SS	自由度	MS	F	P-值	臨界值
11	組間	463.333	2	231.667	3.382	0.06041	3.88529
12	組內	822	12	68.5			
13							
14	總和	1285.33	14				

多重比較

○ 單一信賴區間

$$(\bar{Y}_i - \bar{Y}_j) - t_{\alpha/2} \sqrt{MSE \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)} \leq \mu_i - \mu_j \leq (\bar{Y}_i - \bar{Y}_j) + t_{\alpha/2} \sqrt{MSE \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}$$

○ 聯合信賴區間

若有k個小母體，則可求 $m = C_k^2$ 個母體均數差 $1 - \alpha$ 的聯合信賴區間如下：

$$\bar{Y}_i - \bar{Y}_j \pm t_{\sum n_i - k, \alpha/2m} \sqrt{MSE \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}$$

其中 $t_{\sum n_i - k, \alpha/2m}$ 是指在自由度為 $\sum n_i - k$ 的分配右尾機率為 $\alpha/2m$ 的臨界值。

表13.8 三條生產線的產量

生產線	\bar{Y}_i	S_i^2
1	52	15
2	47	9
3	45	10

表13.9 產量的變異數分析

變異來源	平方和 (SS)	自由度	平均平方和 (MS)	F
因子變異	156	2	78	6.88
隨機變異	170	15	11.33	
總和	326	17		

圖13.6 完全隨機實驗

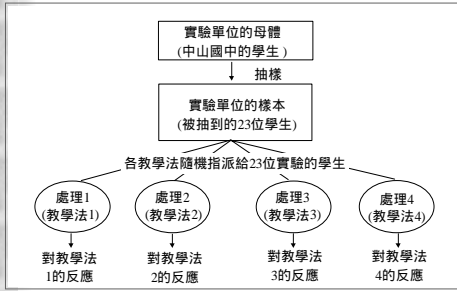
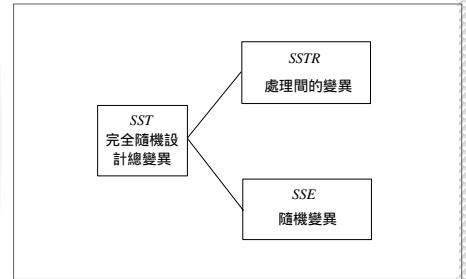


圖13.7 一因子完全隨機實驗設計



一因子變異數分析 完全隨機設計

○ 總變異

總變異 = 處理間變異 + 隨機變異
 $SST = SSTR + SSE$

○ 處理間的變異(組間變異)

$$SSTR = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^k n_i (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2$$

○ 隨機變異(組內變異)

$$SSE = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2 = \sum_{i=1}^k (n_i - 1) S_i^2$$

一因子變異數分析 完全隨機設計

○ 處理間平均變異

$$MSTR = \frac{SSTR}{k - 1}$$

○ 隨機平均變異

$$MSE = \frac{SSE}{\sum n_i - k}$$

一因子變異數分析 完全隨機設計

○ F檢定統計量

$$F = \frac{MSTR}{MSE}$$

○ 決策法則

- ① 若 $F > F_{k-1, n_i-k, \alpha}$, 則拒絕 H_0 .
- ② 若 $F \leq F_{k-1, n_i-k, \alpha}$, 則接受 H_0 .

表13.10 變異數分析表

變異來源	平方和 (SS)	自由度 (df)	平均平方和 (MS)	檢定統計量
因子(處理間)	SSTR	k - 1	$MSTR = \frac{SSTR}{k-1}$	$F = \frac{MSTR}{MSE}$
隨機(處理內)	SSE	$\sum n_i - k$	$MSE = \frac{SSE}{\sum n_i - k}$	
總和	SST	$\sum n_i - 1$		

表13.11 四種教學法的學習效果

樣本觀察值	教學方法			
	教學法 1	教學法 2	教學法 3	教學法 4
1	65	75	59	94
2	87	69	78	89
3	73	83	67	80
4	79	81	62	88
5	81	72	83	
6	69	79	76	
		90		
樣本平均數 \bar{Y}_i	75.67	78.43	70.83	87.75
樣本變異數 S_i^2	66.67	50.62	91.77	33.58

表13.12 學習成績的ANOVA表

變異來源	平方和(SS)	自由度	平均平方和(MS)	檢定統計量
因子變異	$SSTR = 7128$	3	237.6	$F = 3.77$
隨機變異	$SSE = 1,196.66$	19	62.98	
總變異	$SST = 1,909.46$	22		

表13.13 三種魚類捕食埃及斑蚊幼蟲數目

樣本觀察值	魚類		
	大肚魚	孔雀魚	蓋斑鬥魚
1	56	46	425
2	78	24	278
3	23	47	551
4	41	19	238
5	22	73	381
6	53		
7	35		
平均數 \bar{Y}_i	44	41.8	374.6
樣本變異數 S_i^2	399.3	463.7	15422.3

資料來源：改寫自「蓋斑鬥魚防治登革熱病媒埃及斑蚊幼蟲潛力之研究」，王正雄，中華公共衛生雜誌，第17卷第6期。

表13.14 一因子變異數分析-完全隨機實驗

	A	B	C	D	E	F	G
1	單因子變異數分析						
2							
3	清單						
4	組	個數	總和	平均	變異數		
5	大肚魚	7	303	44	399.3333		
6	孔雀魚	5	209	41.8	463.7		
7	蓋斑鬥魚	5	1873	374.6	15422.3		
8							
9	ANOVA						
10	變異	SS	自由度	MS	F	P-值	臨界值
11	組間	38798.1	2	19399.05	41.17921	1.36609E-06	3.738897
12	組內	65943	34	1939.5			
13							
14	總和	45342.1	36				

圖13.8 隨機集區設計

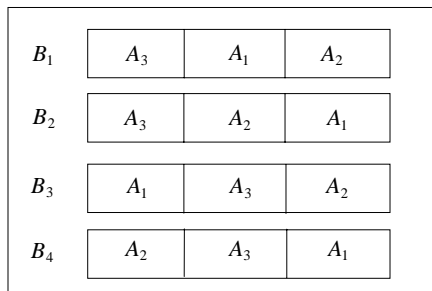
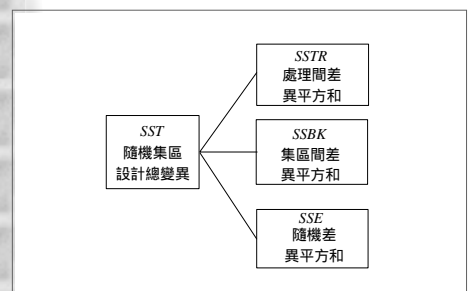


圖13.9 一因子隨機集區實驗設計



第13章 變異數分析 應用統計學

一因子變異數分析 隨機集區設計

- 總變異

$$SST = \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^k (Y_{ij} - \bar{Y})^2$$
- 處理間的變異(因子變異)

$$SSTR = \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^k (\bar{Y}_j - \bar{Y})^2 = b \sum_{j=1}^k (\bar{Y}_j - \bar{Y})^2$$
- 集區間變異

$$SSBK = \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^k (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 = k \sum_{i=1}^b (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2$$
- 隨機變異

$$SSE = SST - SSTR - SSBK$$

第13章 變異數分析 應用統計學

一因子變異數分析 隨機集區設計

- 處理間平均變異(變異數)

$$MSTR = \frac{SSTR}{k-1}$$
 式中： $k-1$ 為SSTR的自由度。
- 集區間平均變異(變異數)

$$MSBK = \frac{SSBK}{b-1}$$
 式中： $b-1$ 為SSBK的自由度。
- 隨機平均變異(變異數)

$$MSE = \frac{SSE}{(k-1)(b-1)}$$
 式中： $(k-1)(b-1)$ 為SSE的自由度(或表為 $kb-k-b+1$)。

第13章 變異數分析 應用統計學

一因子變異數分析 隨機集區設計

- F檢定統計量

$$\frac{MSTR}{MSE} \sim F_{k-1, (k-1)(b-1)}$$
- 決策法則
 - ① 若 $F > F_{k-1, (k-1)(b-1), \alpha}$ ，則拒絕 H_0 。
 - ② 若 $F \leq F_{k-1, (k-1)(b-1), \alpha}$ ，則接受 H_0 。

第13章 變異數分析 應用統計學

表13.15 隨機集區實驗的ANOVA表

變異來源	平方和(SS)	自由度(df)	平均平方和(MS)	F 值
處理(因子)	SSTR	$k-1$	$MSTR = \frac{SSTR}{k-1}$	$F_1 = \frac{MSTR}{MSE}$
集區	SSBK	$b-1$	$MSBK = \frac{SSBK}{b-1}$	$F_2 = \frac{MSBK}{MSE}$
隨機	SSE	$(k-1)(b-1)$	$MSE = \frac{SSE}{(k-1)(b-1)}$	
總合	SST	$kb-1$		

第13章 變異數分析 應用統計學

表13.16 四種教學法的學習效果

集區	處理				集區和	集區平均 \bar{Y}_i
	教學法 1	教學法 2	教學法 3	教學法 4		
學生 1	76	75	73	80	304	76
學生 2	78	71	76	87	312	78
學生 3	73	80	69	81	303	75.75
學生 4	79	78	65	80	302	75.5
學生 5	80	75	83	82	320	80
學生 6	67	77	78	81	303	75.75
學生 7	72	86	79	79	316	79
處理和	525	542	523	570	2,160	
處理平均數 \bar{Y}_j	75	77.43	74.71	81.43		

第13章 變異數分析 應用統計學

表13.17 隨機集區實驗的ANOVA表

變異來源	平方和 (SS)	自由度 (df)	平均平方和 (MS)	F 值
因子(處理)	202.809	3	67.60	2.69
集區	80.929	6	13.49	
隨機	451.691	18	25.09	
總和	735.429	27		

表13.18 台農67號稻種果實重量

	溫度(日間/夜間)			區塊因素平均數 \bar{Y}
	20/15	30/25	35/30	
區塊1	21.21	26.03	30.55	25.93
區塊2	12.27	26.82	27.73	22.27
區塊3	11.82	25.00	25.00	20.61
區塊4	15.10	25.95	27.76	22.94
溫度因素平均數 \bar{Y}	15.10	25.95	27.76	$\bar{Y} = 22.94$

資料來源：改寫自林詔凱，「充實期溫度對水稻穀粒蛋白質表現之影響」，國立台灣大學農藝學研究所碩士論文，88學年度。

表13.19 一因子變異數分析-集區設計

	A	B	C	D	E
1	雙因子變異數分析：無重複試驗				
2					
3	摘要	個數	總和	平均	變異數
4	區塊1	3	77.28	25.76	22.8175
5	區塊2	3	66.82	22.2733	75.25703
6	區塊3	3	61.82	20.60667	57.90413
7	區塊4	3	68.81	22.93667	46.87903
8					
9	溫度20/15	4	60.1	15.025	17.5003
10	溫度30/25	4	103.68	25.92	0.552467
11	溫度35/30	4	110.95	27.7375	4.968825

表13.20 一因子變異數分析集區設計 ANOVA表

	A	B	C	D	E	F	G
14	ANOVA						
15	變源	SS	自由度	MS	F	P-值	臨界值
16	行(集區)	41.49869	3	13.8329	3.000891	0.116257	4.757055
17	欄(因子或處理)	378.1493	2	189.0747	41.15376	0.000314	5.143249
18	錯誤(殘差)	27.56608	6	4.594347			
19							
20	總和	447.2141	11				

圖13.10 二因子的變異數分析

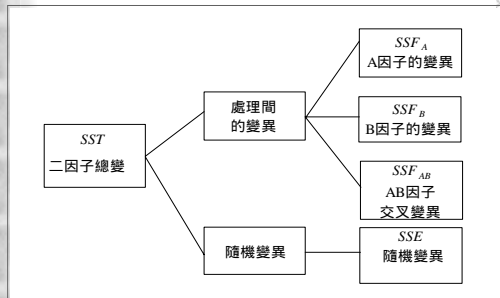


圖13.12 無交叉影響

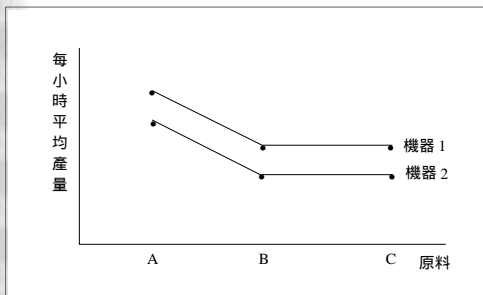


圖13.13 有交叉影響

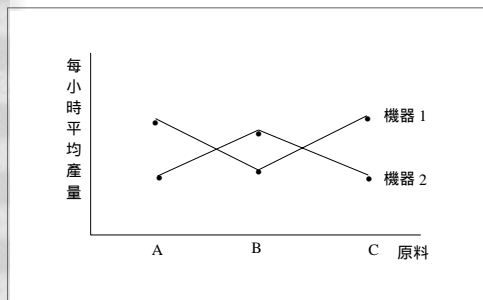


表13.22 二因子變異數分析表

變異來源	平方和	自由度	平均平方和	F 值
A 因子	$SSF_A = \sum \sum (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2$	$r - 1$	$MSF_A = \frac{SSF_A}{r - 1}$	$F_A = \frac{MSF_A}{MSE}$
B 因子	$SSF_B = \sum \sum (\bar{Y}_j - \bar{Y})^2$	$c - 1$	$MSF_B = \frac{SSF_B}{c - 1}$	$F_B = \frac{MSF_B}{MSE}$
隨機	$SSE = \sum \sum (Y_{ij} - \bar{Y}_i - \bar{Y}_j + \bar{Y})^2$	$(r-1)(c-1)$	$MSE = \frac{SSE}{(r-1)(c-1)}$	
總和	$SST = \sum \sum (Y_{ij} - \bar{Y})^2$	$rc - 1$		

二因子變異數分析-無交叉影響

○ F檢定統計量(A因子)

$$F_A = \frac{MSF_A}{MSE}$$

F_A 的自由度為 $r-1$ 及 $(r-1)(c-1)$

○ 決策法則

在選定的顯著水準 α 下，決策法則為：

- ① 若 $F_A > F_{(r-1),(r-1)(c-1),\alpha}$ ，則拒絕 H_0 。
- ② 若 $F_A \leq F_{(r-1),(r-1)(c-1),\alpha}$ ，則接受 H_0 。

二因子變異數分析-無交叉影響

○ F檢定統計量(B因子)

$$F_B = \frac{MSF_B}{MSE}$$

F_B 的自由度為 $c-1$ 及 $(r-1)(c-1)$

○ 決策法則

在選定的顯著水準 α 下，決策法則為：

- ① 若 $F_B > F_{(c-1),(r-1)(c-1),\alpha}$ ，則拒絕 H_0 。
- ② 若 $F_B \leq F_{(c-1),(r-1)(c-1),\alpha}$ ，則接受 H_0 。

表13.25 機器與性別對產量的影響的變異數分析表

變異來源	平方和	自由度	平均平方和	F 值
A (性別)因子	96	1	96	192
B (機器)因子	343	2	171.5	343
隨 機	1	2	0.5	
總 和	440	5		

表13.26 機器與性別對產量影響的變異數分析

	A	B	C	D	E
1	雙因子變異數分析：無重複試驗				
2					
3	機器	個數	總和	平均	變異數
4	男	3	111	37	91
5	女	3	87	29	81
6					
7	機器1	2	48	24	32
8	機器2	2	65	32.5	24.5
9	機器3	2	85	42.5	40.5

表13.26 機器與性別對產量影響的變異數分析(續)

	A	B	C	D	E	F	G
12	ANOVA						
13	變源	SS	自由度	MS	F	P-值	臨界值
14	列	96	1	96	192	0.005168	18.51276
15	欄	343	2	171.5	343	0.002907	19.00003
16	總誤	1	2	0.5			
17							
18	總和	440	5				

第13章 變異數分析 應用統計學

表13.27 不同溫度下稻米重量比較

單位：(毫克/粒)

因子B (稻作品種)	因子B (溫度 (日間/夜間))		
	20/15	30/25	35/30
台農67號	20.91	25.91	30.46
	12.27	26.82	27.73
	11.82	25.00	25.00
	15.10	25.95	27.76
台中在來1號	13.19	20.01	19.10
	12.27	26.36	27.27
	10.00	19.09	21.82
	11.80	21.75	22.07

資料來源：同表13.18。

第13章 變異數分析 應用統計學

表13.28 稻作品種與溫度對稻穀重量的變異數分析

	A	B	C	D	E
1	雙因子變異數分析：重複試驗				
2					
3	摘要 溫度20/15 溫度30/25 溫度35/30 總和				
4	台農67號				
5	個數	4	4	4	12
6	總和	60.1	103.68	110.95	274.73
7	平均	15.025	25.92	27.7375	22.89417
8	變異數	17.5003	0.552467	4.968825	40.65583
9					

第13章 變異數分析 應用統計學

表13.28 稻作品種與溫度對稻穀重量的變異數分析 (續)

	A	B	C	D	E
10	台中在來1號				
11	個數	4	4	4	12
12	總和	47.26	87.21	90.26	224.73
13	平均	11.815	21.8025	22.565	18.7275
14	變異數	1.797367	10.44809	11.64777	32.68531
15					
16	總和				
17	個數	8	8	8	
18	總和	107.36	190.89	201.21	
19	平均	13.42	23.86125	25.15125	
20	變異數	11.21446	9.55847	14.76561	

第13章 變異數分析 應用統計學

表13.28 稻作品種與溫度對稻穀重量的變異數分析 (續)

	A	B	C	D	E	F	G
23	ANOVA						
24	變源	SS	自由度	MS	F	P-值	臨界值
25	樣本	104.1667	1	104.1667	13.32202	0.000832	4.413863
26	種	662.1494	2	331.0747	42.3416	1.56E-07	3.554561
27	交互作用	3.858638	2	1.929319	0.246745	0.78394	3.554561
28	組內	140.7444	18	7.819136			
29							
30	總和	910.9192	21				