

第10章 統計估計 應用統計學

## 10 統計估計

### 學習目的

1. 了解點估計的意義、估計的步驟與限制。
2. 了解優良估計式的性質。
3. 了解區間估計的意義。
4. 了解大樣本與小樣本母體常態、變異數已知與未知下，單一母體平均數區間估計的方法。知悉  $t$  分配的意義與機率值。
5. 了解單一母體比例區間估計的方法。
6. 了解單一母體變異數區間估計的方法。了解卡方分配的意義與卡方值。
7. 了解區間估計的方法在經濟、政治、社會及企業管理方面的應用。
8. 利用 Excel 做統計估計。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2002

第10章 統計估計 應用統計學

## 本章結構

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2002

第10章 統計估計 應用統計學

## 統計估計

### 統計估計

統計估計是利用樣本統計量去推估母體參數的方法。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2002

第10章 統計估計 應用統計學

## 點估計

### 點估計

由母體抽取一組樣本數為  $n$  的隨機樣本，並由由此得到的樣本統計量做為母體參數的估計值。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2002

第10章 統計估計 應用統計學

## 點估計

### 點估計的步驟

- ① 抽取具代表性的樣本
- ② 選擇一個較佳的樣本統計量做為估計式
- ③ 計算樣本統計量的值
- ④ 以樣本統計量的值推論母體參數值並做決策

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2002

第10章 統計估計 應用統計學

## 表 10.1 36 輛大型公車的載客收入

表 10.1 36 輛大型公車每輛每天的載客收入

4,054	6,552	3,924	4,473	3,732	6,173
4,328	5,852	6,790	1,923	8,455	1,835
1,774	3,750	3,117	4,890	5,793	4,497
4,200	8,672	6,554	848	794	6,050
4,859	4,610	5,294	8,310	4,768	4,465
4,016	7,732	5,541	9,978	9,274	1,655

資料來源：參考《台北市公共汽車管理處統計月報》，資料虛擬，台北市公共汽車管理處，2001 年 8 月。）

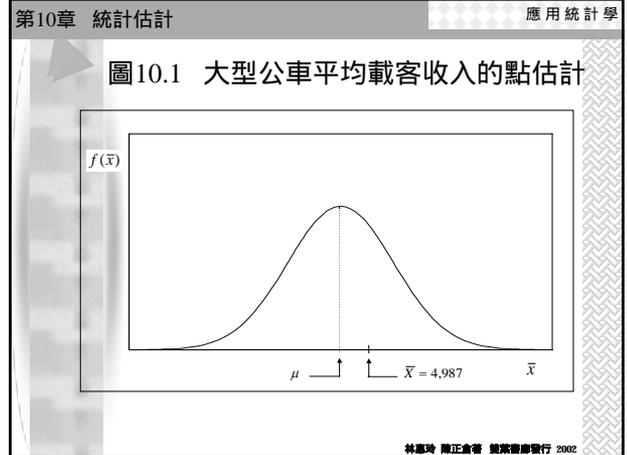
林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2002

第10章 統計估計 應用統計學

表10.2 大型公車平均載客收入的估計

	A	B	C
1	大型公車的載客收入		
2			
3	平均數	4987	
4	標準誤	385.2604108	
5	標準差	2311.562465	
6	變異數	5343321.029	
7	個數	36	

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2002



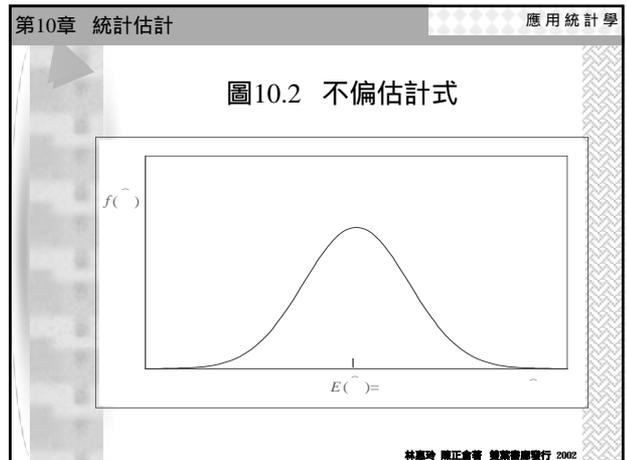
第10章 統計估計 應用統計學

估計式的評斷標準

○ 不偏性

若估計式的抽樣分配的平均數等於母體參數值，則該估計式為不偏估計式，否則為偏誤估計式。即若  $E(\hat{\theta}) = \theta$ ，則  $\hat{\theta}$  為  $\theta$  的不偏估計式。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2002



第10章 統計估計 應用統計學

表10.3 幾個常用的估計式的不偏性

估計式	不偏性
$\bar{x}$ 估計 $\mu$	不偏
$S^2$ 估計 $\sigma^2$ (樣本抽出放回或母體無限)	不偏
$s$ 估計 $\sigma$	偏誤
$\hat{p}$ 估計 $p$	不偏
$\hat{pq}$ 估計 $pq$	偏誤
$\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ 估計 $\mu_1 - \mu_2$	不偏
$\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ 估計 $p_1 - p_2$	不偏

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2002

第10章 統計估計 應用統計學

估計式的評斷標準

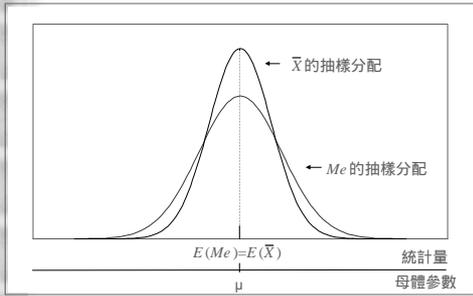
○ 相對有效性

設  $\hat{\theta}_1$ 、 $\hat{\theta}_2$  均為  $\theta$  的不偏估計式，若  $V(\hat{\theta}_1) / V(\hat{\theta}_2) < 1$ ，則  $\hat{\theta}_1$  相對  $\hat{\theta}_2$  為有效估計式。

○ 不偏估計式的相對有效性

設  $\hat{\theta}_1$ 、 $\hat{\theta}_2$  均為  $\theta$  的不偏估計式，若  $V(\hat{\theta}_1) / V(\hat{\theta}_2) < 1$ ，則  $\hat{\theta}_1$  相對  $\hat{\theta}_2$  為有效估計式。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2002

圖10.5  $\bar{X}$  與  $m_e$  的相對有效性

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2002

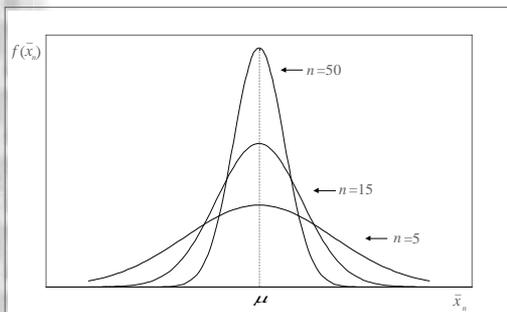
## 估計式的評斷標準

## ○ 一致性

樣本統計量的平均平方誤差隨樣本數  $n$  增加而減小，則稱樣本統計量為一致性估計式。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2002

圖10.6 一致性估計式



林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2002

## 區間估計

## ○ 區間估計的意義

對未知的母體參數估計出一個上下限的區間，並指出該區間包含母體參數的可靠度。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2002

## 信賴區間

## ○ 信賴區間

信賴區間是在一個既定的信賴水準下所構成的一個區間。是由樣本統計量及抽樣誤差所構成的一個(包含上限, 下限的)區間。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2002

## 信賴水準

## ○ 信賴水準(信賴係數)

信賴水準是指信賴區間包含母體參數的信心(或稱可靠度, 信賴度)。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2002

母體平均數的區間估計—大樣本

○ 大樣本變異數已知，母體平均數的信賴區間

信賴水準  $1 - \alpha$  下，以  $\bar{x}$  估計  $\mu$  所得的信賴區間為：

$$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{x}}$$

$\bar{X} - Z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{x}}$  稱為信賴區間下限， $\bar{X} + Z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{x}}$  稱為信賴區間上限。

○ 大樣本變異數未知，母體平均數的信賴區間

$$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

區間估計

○ 區間估計的步驟

- ①步驟1 選擇較佳的點估計式並計算點估計值
- ②步驟2 取得樣本統計量的抽樣分配
- ③步驟3 導出母體參數的信賴區間
- ④步驟4 求出母體參數的信賴區間值並做統計推論

圖10.7 母體平均數的信賴區間

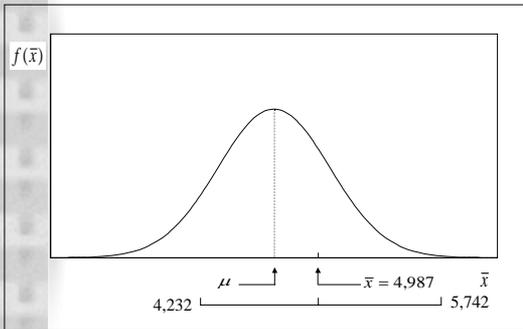


圖10.9 抽樣誤差小於等於  $1.96 \sigma_{\bar{x}}$  的區間

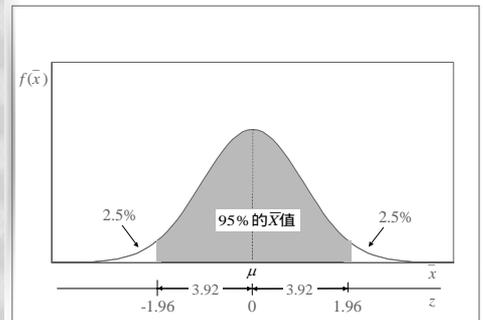


圖10.10 母體平均數  $\mu$  的信賴區間

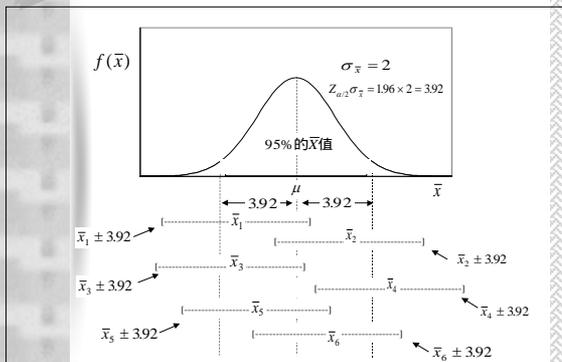
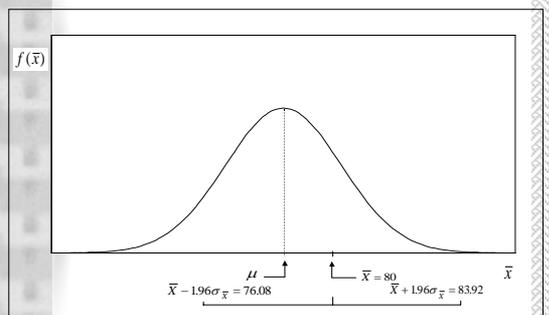


圖10.11 母體平均數  $\mu$  的信賴區間



第10章 統計估計 應用統計學

表10.6 常用的信賴水準與其母體平均數的信賴區間

信賴水準 $1-\alpha$	$\alpha$	$\alpha/2$	$Z_{\alpha/2}$	信賴區間 $\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{X}}$
0.90	0.10	0.05	1.645	$\bar{X} \pm 1.645 \sigma_{\bar{X}}$
0.95	0.05	0.025	1.96	$\bar{X} \pm 1.96 \sigma_{\bar{X}}$
0.99	0.01	0.005	2.575	$\bar{X} \pm 2.575 \sigma_{\bar{X}}$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2002

第10章 統計估計 應用統計學

信賴區間長度的決定因素

- 母體標準差的大小  
若母體變異數或標準差越大，則信賴區間長度越長，越不精確。
- Z 值的大小  
Z 值會受信賴水準的影響，信賴水準越大，信賴區間長度越長。
- 樣本數  $n$  的多寡  
 $\bar{X}$  的標準差為  $\sigma_{\bar{X}} = \sigma / \sqrt{n}$ ，當  $n$  愈大時，標準差  $\sigma_{\bar{X}}$  愈小，區間長度也就愈小。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2002

第10章 統計估計 應用統計學

母體平均數的區間估計—小樣本

- 小樣本常態母體變異數已知，母體平均數的信賴區間

$$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2002

第10章 統計估計 應用統計學

母體平均數的區間估計—小樣本

- 小樣本常態母體變異數未知，母體平均數的信賴區間

$$\bar{X} \pm t_{n-1, \alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

為自由度  $n-1$  的  $t$  分配。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2002

第10章 統計估計 應用統計學

t 分配

- t 分配

自常態母體  $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$  隨機抽取樣本  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ，則統計量

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}}$$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2002

第10章 統計估計 應用統計學

t 分配的性質

- t 分配的性質

- $t$  分配為一個以平均數 0 為中心的對稱分配，不同的自由度  $\nu$  有不同的  $t$  分配。
- $t$  分配不與橫軸相交。 $t$  分配曲線下的總面積等於 1。
- $t$  分配決定於自由度  $\nu$ ，它是  $t$  分配唯一的參數。
- 自由度趨近於無窮大時 ( $\nu \rightarrow \infty$ )， $t$  分配趨近於標準常態分配，即  $t \sim N(0,1)$ 。一般若  $\nu \geq 30$ ，則以標準常態分配代替  $t$  分配。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2002

圖10.14  $t$ 分配為以0為中心的對稱分配

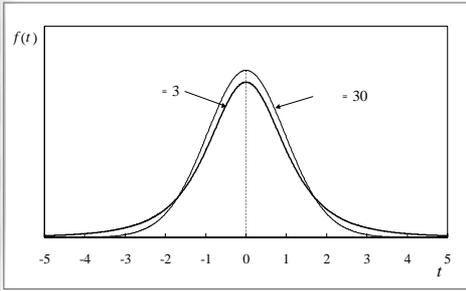


圖10.15 標準常態分配與 $t$ 分配

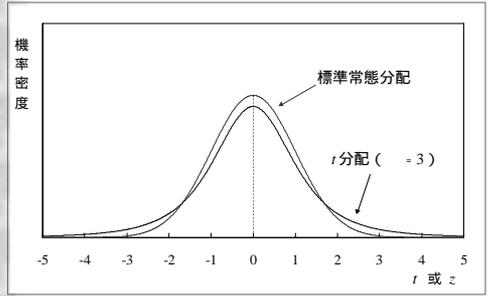


圖10.16  $t$ 分配的機率值

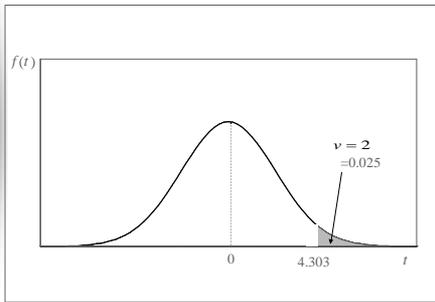


表10.7  $t$ 值表(部份)

$d.f.$	$t_{0.10}$	$t_{0.05}$	$t_{0.025}$	$t_{0.010}$	$t_{0.005}$	$d.f.$
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	1
2	1.886	2.920	4.303	6.965	10.925	2
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	3
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	4
5	1.473	2.015	2.571	3.365	4.032	5
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	6
∴	∴	∴	∴	∴	∴	∴
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	27
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	28
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	29
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.575	∞

圖10.17  $t$ 值

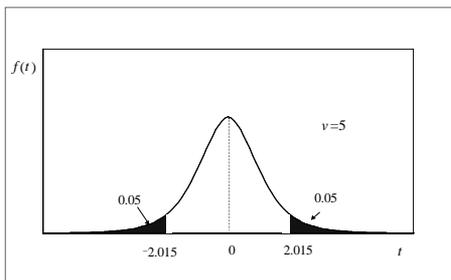
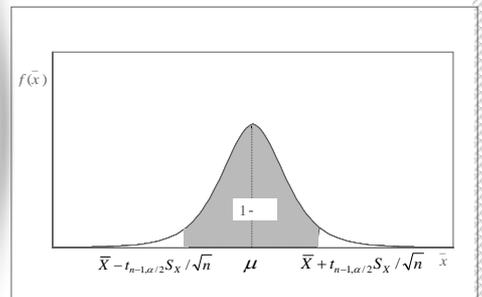


圖10.20  $(1 - \alpha) \bar{x}$  的機率區間

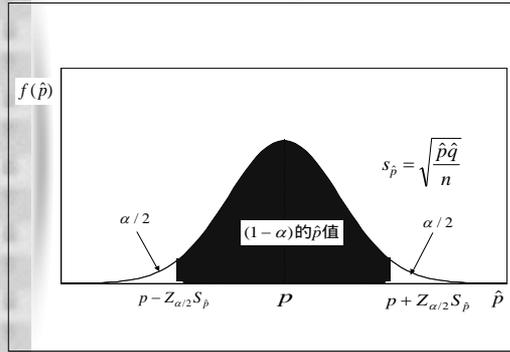


母體比例的區間估計

- 大樣本母體比例的信賴區間

$$\hat{p} \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

圖10.21  $(1-\alpha)\hat{p}$  的機率區間



樣本數的選擇—估計母體平均數時

- 估計誤差不超過d值

$$\bar{X} - \mu = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq d$$

- 估計母體平均數時的樣本數

$$n \geq \frac{Z_{\alpha/2}^2 \sigma^2}{d^2}$$

- 估計母體平均數時的樣本數(母體變異數未知)

$$n \geq \frac{Z_{\alpha/2}^2 S^2}{d^2}$$

樣本數的選擇—估計母體比例時

- 估計母體比例時的樣本數

$$n \geq \frac{Z_{\alpha/2}^2 \hat{p}\hat{q}}{d^2}$$

母體變異數的區間估計

- 樣本變異數

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

- 卡方統計量

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2}$$

該統計量為自由度  $(n-1)$  的卡方分配

$\chi^2$  分配的性質

- 卡方分配的性質

① 卡方分配為一定義在大於等於0(正數)範圍的右偏分配，不同的自由度決定不同的卡方分配。

② 卡方分配只有一個參數即自由度，表為v。卡方分配的平均數與變異數為：

$$E(\chi^2) = v, V(\chi^2) = 2v$$

③ 卡方分配當自由度增加而逐漸對稱，當自由度趨近於無窮大時( $v \rightarrow \infty$ )，卡方分配會趨近於常態分配。

④ 卡方分配的加法定理

二個獨立的卡方隨機變數相加所得之隨機變數仍為卡方隨機變數，其卡方分配的自由度為二個卡方分配的自由度之和。

圖10.22 卡方分配

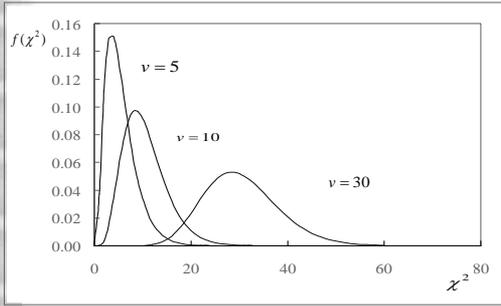


表10.9 卡方值

df	$\chi^2_{0.995}$	$\chi^2_{0.95}$	$\chi^2_{0.90}$	$\chi^2_{0.10}$	$\chi^2_{0.05}$	$\chi^2_{0.005}$	df
1	.0000393	.0039321	.0157908	2.70554	3.84146	7.87944	1
2	.0100251	.102587	.210720	4.60517	5.99147	10.5966	2
3	.0717212	.351846	.584375	6.25139	7.81473	12.8381	3
4	.206990	.710721	1.063623	7.77944	10.48773	14.8602	4
5	.411740	1.145476	1.61031	9.23635	10.0705	16.7496	5
6	.675727	1.63539	2.20413	10.6446	12.5916	18.5476	6
...	...	...	...	...	...	...	...
17	5.69724	8.67175	10.0852	24.7690	27.5871	35.7185	17
18	6.26481	10.39046	10.8649	25.9894	28.8693	37.1564	18
19	6.84398	10.1170	10.6509	27.2036	30.1435	38.5822	19
20	7.43386	10.8508	12.4426	28.4120	31.4104	310.9968	20
...	...	...	...	...	...	...	...

資料來源：摘錄自附表6。

圖10.23 卡方分配機率值

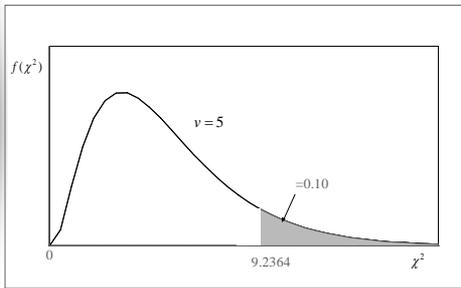
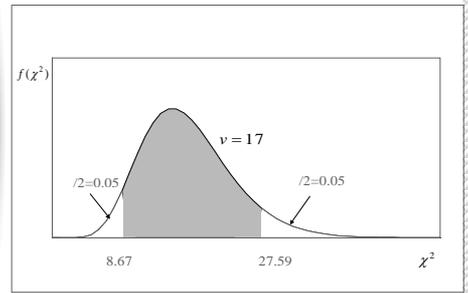


圖10.24 卡方值的機率區間



母體變異數的區間估計

○ 母體變異數的信賴區間

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1, \alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1, 1-\alpha/2}}$$