C.2 豎曲線

8.4 凸形豎曲線之長度

凸形豎曲線之最短長度係由視距決定之，由視距所決定之長度可增交通安全，並達舒適美觀。凸形豎曲線之長度可分爲兩種情形設計之。

甲、豎曲線之長度大於視距時（L＞S）

如圖八～4 所示之凸形豎曲線，設視點A之高度爲 h_1（即爲駕駛人眼部離路面之高度），障碍物B之高度爲 h_2（即障碍物離路面之高度），AB爲視距，其水平距離爲S，AB切路面於C點，AC與BC之水平距離各爲p及q，豎曲線前後端之縱斷坡度各爲 G_1%及 G_2%，並設豎曲線之長度爲L。則由(2)式得

$$h_1 = Ap^2 \qquad 即\ p = \sqrt{\frac{h_1}{A}}$$

$$又\quad h_2 = Aq^2 \qquad 即\ q = \sqrt{\frac{h_2}{A}}$$

但 $S = p + q$，故得

$$S = \sqrt{\frac{h_1}{A}} + \sqrt{\frac{h_2}{A}}$$

$$S^2 = \frac{h_1}{A} + \frac{h_2}{A} + \frac{2}{A}\sqrt{h_1 h_2} = \frac{1}{A}(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2})^2$$

又 $A = \dfrac{G_1 - G_2}{200L}$ 代入上式得

$$S^2 = \frac{200L}{G_1 - G_2}(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2})^2$$

解之得 $$L = \frac{S^2(G_1 - G_2)}{200(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2})^2} \quad \cdots\cdots (8\sim1)$$

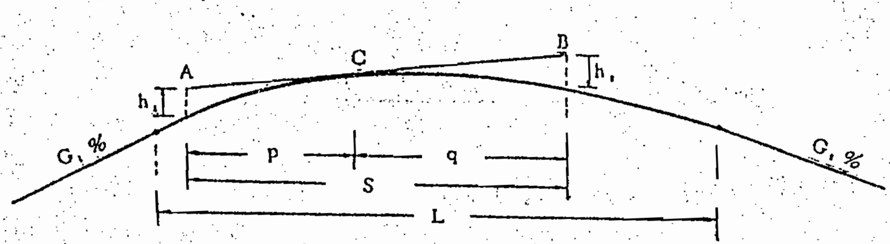
如用停車視距時，$h_1 = 1.4$ 公尺，$h_2 = 0.1$ 公尺

可得公式如下：

$$L = \frac{S^2}{450}(G_1 - G_2) \quad \cdots\cdots (8\sim2)$$

如用超車視距時，$h_1 = h_2 = 1.4$ 公尺，可得公式如下

$$L = \frac{S^2}{1120}(G_1 - G_2) \quad \cdots\cdots (8\sim3)$$



圖八～4　凸形豎曲線（L＞S）

我國「公路標準規範」中對凸形豎曲線長度（L＞S）之公式規定如下

$$L = \frac{S^2}{442}(G_1 - G_2) \quad \cdots\cdots (8\sim4)$$

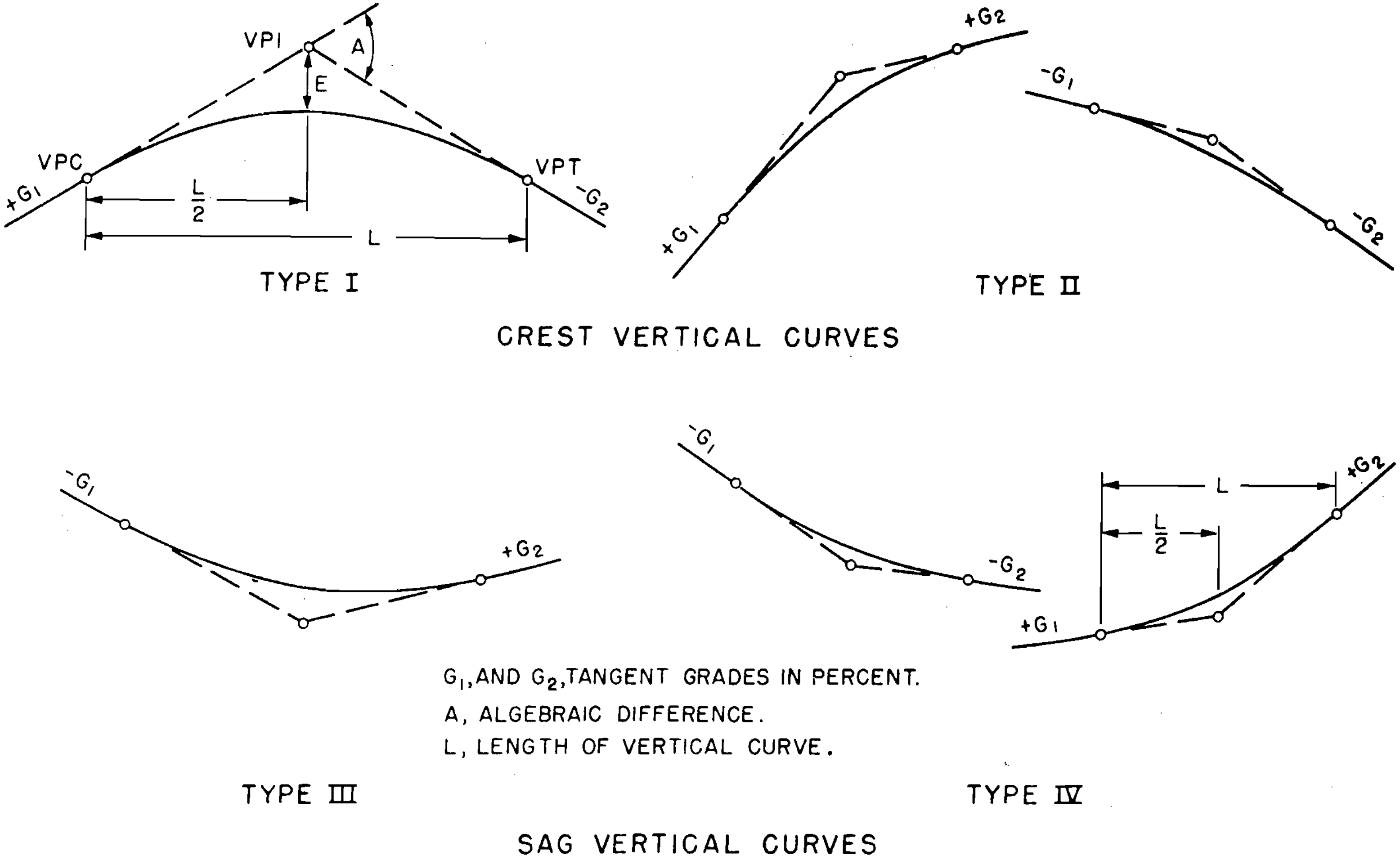


Figure III-38. Types of vertical curves.

乙、豎曲 之長度小於視距時（L＜S ）

如圖八～5所示之凸形豎曲線，設視點A之高度AA′為h_1，障礙物之高度BB′為h_2，AB為視距，其水平距離為S，AB切路面於C點，則A′M、MC、CN、NB′之水平長度，各為m、p、q及n，則視距S＝m+p+q+n而豎曲線之水平長度L＝p＋q，豎曲線前後端之縱斷坡度各為G_1%及G_2%。

由M作AB之平行線，交視點A之垂線AA′於A″ 由(2)式

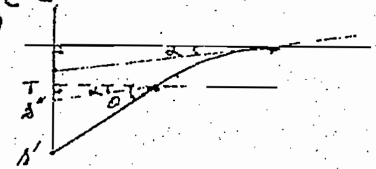
得 $AA'' = Ap^2$

M及C兩點之坡度差為：

$$\frac{G_1-G_2}{100L}p = 2Ap$$

①
$$\frac{dy}{dx} = \frac{G_2-G_1}{100L}x + \frac{G_1}{100}$$
M點之slope $= \frac{G_1}{100}$
C 〃 〃 $= \frac{G_1-G_2}{100L}p + \frac{G_1}{100}$

②



故得 $A''A' = 2Apm$

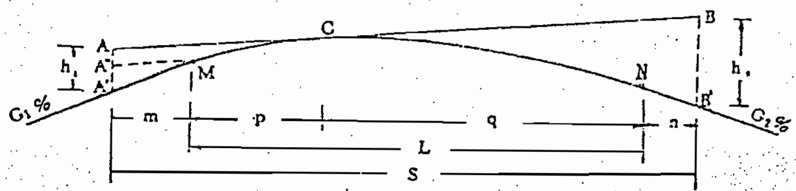
然 $h_1 = AA'' + A''A'$

$= Ap^2 + 2Apm$

解m得 $m = \frac{1}{2Ap}(h_1 - Ap^2)$

$$= \frac{h_1}{2Ap} - \frac{p}{2}$$

$A''A' = TA' - TA''$
$= (\tan\theta - \tan\alpha)m$
$= 2Apm$



圖八～5 凸形豎曲線（L＜S）

同理可得 $n = \frac{h_2}{2Aq} - \frac{q}{2}$

因之 $S = m + p + q + n$

$$= \frac{h_1}{2Ap} - \frac{p}{2} + p + q + \frac{h_2}{2Aq} - \frac{q}{2}$$

$$= \frac{h_1}{2Ap} + \frac{p}{2} + \frac{q}{2} + \frac{h_2}{2Aq}$$

$$= \frac{h_1}{2Ap} + \frac{p}{2} + \frac{L-p}{2} + \frac{h_2}{2A(L-p)}$$

$$= \frac{h_1}{2Ap} + \frac{L}{2} + \frac{h_2}{2A(L-p)}$$

求S對p之微分，並使之等於零得

$$\frac{ds}{dp} = -\frac{h_1}{2Ap^2} + \frac{h_2}{2A(L-p)^2} = 0$$

$$\therefore \quad p = \frac{L\sqrt{h_1}}{\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}}$$

代入公式得 $S = \frac{(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2})^2}{2AL} + \frac{L}{2}$

解L得 $L = 2S - \frac{(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2})^2}{AL}$

$$\therefore \quad L = 2S - \frac{200(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2})^2}{(G_1-G_2)} \cdots\cdots (8\sim5)$$

如用停車視距時，$h_1 = 1.4$公尺，$h_2 = 0.1$公尺，可得公式如下：

$$L = 2S - \frac{450}{G_1-G_2} \cdots\cdots (8\sim6)$$

如用超車視距時，$h_1 = h_2 = 1.4$公尺，可得公式如下：

$$L = 2S - \frac{1120}{G_1-G_2} \cdots\cdots (8\sim7)$$

台灣省南北高速公路對凸形豎曲線之規定如表八～2，表中之△為縱斷坡度差，即$G_1 - G_2$。

表八～2 南北高速公路所規定之凸形豎曲線長度

速率	凸形豎曲線長度（公尺）	
（公里／小時）	理想值	不得已
120	150△	100△
100	90△	60△
85	40△	30△

我國「公路標準規範」中對凸形豎曲線長度（L<S）之公式規定如下：

$$L = 2S - \frac{442}{G_1-G_2} \cdots\cdots (8\sim8)$$

8·5 凹形豎曲線之長度

凹形豎曲線之長度設計，主要根據車燈照射距離決定之，即所謂車燈視距，凹形豎曲線之長度可分兩種情形設計之。

甲、豎曲線之長度大於視距（$L>S$）

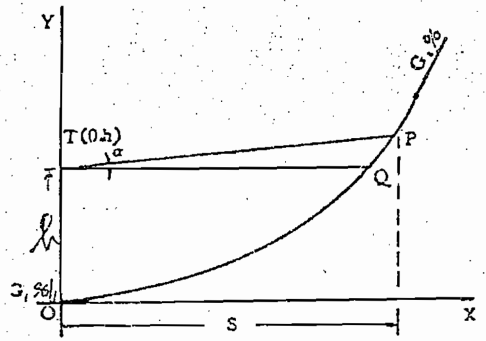
如圖八～6 所示，設其座標方程式為 $y=-Ax^2$

車燈於T處，距路面高度 h，光幅照射最遠處為P，光幅角度為 α，則PT之方程式為

$$y=\tan\alpha\cdot x+h$$

將之代入凹形豎曲線之座標方程式，得　　$G_2>G_1$

$$Ax^2+\tan\alpha\cdot x+h=0$$



圖八～6　凹形豎曲線（L>S）

但 x 應等於視距 S，將之代入上式而解 A，得

$$A=-\frac{h+S\cdot\tan\alpha}{S^2}$$

將 $A=\frac{G_1-G_2}{200L}$ 代入之，並解出 L，得

$$L=-\frac{G_1-G_2}{200}\cdot\frac{S^2}{(h+S\tan\alpha)} \quad\cdots\cdots(8\sim9)$$

如用 $h=0.75$ 公尺，$\alpha=1°$時，可得公式如下：

$$L=-\frac{(G_1-G_2)S^2}{150+3.5S} \quad\cdots\cdots(8\sim10)$$

乙、豎曲線之長度小於視距（$L<S$）

如圖八～7 所示，車燈在T處，距地面高為 h，設最遠照射距離為PT，光幅角度為 α，B點之座標為（L，$-AL^2$），故BP之公式為

$$y=(x-L)\tan\theta-AL^2$$

但 $\tan\theta=\frac{G_2-G_1}{100}=-2AL$，將之代入 y 式得

$$y=-2ALx+AL^2 \quad\cdots\cdots(1)$$

又PT之方程式為

$$y=x\cdot\tan\alpha+h \quad\cdots\cdots(2)$$

以(2)式代入(1)式，又 x 值為P之橫座標，也即 $x=S$ 得

$$AL^2=2ALS+\tan\alpha\cdot S+h$$

$$L=2S+\frac{S\cdot\tan\alpha+h}{AL} \quad\cdots\cdots(8\sim11)$$

用 $h=0.75$ 公尺，$\alpha=1°$ 時，可得公式如下：

$$L=2S+\frac{150+3.5S}{G_1-G_2} \quad\cdots\cdots(8\sim12)$$

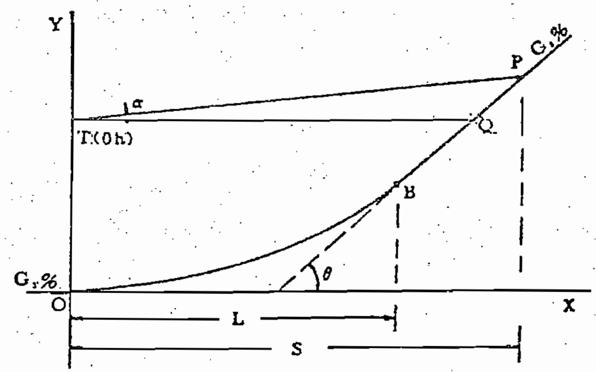
台灣省南北高速公路對凹形豎曲線之規定如表八～3，表中之△為縱斷坡度差，即 G_1-G_2。

表八～3　南北高速公路所規定之凹形豎曲線長度

速率（公里／小時）	凹形豎曲線長度（公尺）	
	理　想　值	不　得　已
120	60△	40△
100	40△	30△
85	30△	20△

我國「公路標準規範」中，對凹形豎曲線長之長度公式規定如下：

$$L=\frac{S^2}{152+3.5S}(G_2-G_1) \quad\cdots\cdots(8\sim13)$$



圖八～7　凹形豎曲線

edge of the structure restricting the view ahead. Let

A = algebraic difference of grades, percent;
L = length of vertical curve, stations;
S = sight distance, stations;
C = vertical clearance at critical edge of underpass, ft;
h_1 = vertical height of driver's eye above road, ft;
h_2 = vertical height of sighted object, ft.

Two cases will be considered: (1) $S > L$, (2) $S < L$.

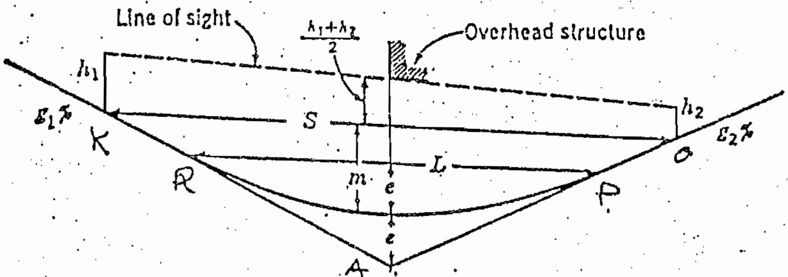


Fig. 108. Sight distance under overhead structure where $S > L$.

注意：
AASHTO 建議
① $h_1 = 6$ ft (eye height of a truck driver)
② $h_2 = 1.5 - 2$ ft (height of tail light of a passenger car)
③ C — clearance 淨距
Minimum = 14.5 ft
Desirable = 16.5 ft
④ 若取 $C = 14.5$ ft, $h_1 = 6$ ft
$h_2 = 1.5$ ft
$\Rightarrow L = 2S - \frac{86}{A}$

① 凹形豎曲線 $S > L$

從相似三角形 $\triangle AKO$ 與 $\triangle AQP$ 得，

$$\frac{S}{L} = \frac{e+m}{2e} \qquad \text{—— (1)}$$

又當 $x = \frac{L}{2}$ 時　　$A = |G_2 - G_1|$

$$e = \frac{1}{2}\frac{A}{L}x^2 = \frac{1}{2}\frac{A}{L}\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{AL}{8} \qquad \text{—— (2)}$$

另外，

$$m = C - \frac{h_1 + h_2}{2} \qquad \text{—— (3)}$$

由公式 (1), (2) 與 (3)

$$\frac{S}{L} = \frac{1}{2} + \frac{m}{2e}$$

$$\frac{S}{L} = \frac{1}{2} + \frac{4\left(C - \frac{h_1+h_2}{2}\right)}{AL}$$

同時乘以 $2L$

$$2S = L + \frac{8\left(C - \frac{h_1+h_2}{2}\right)}{A}$$

$$\therefore L = 2S - \frac{8\left(C - \frac{h_1+h_2}{2}\right)}{A}$$

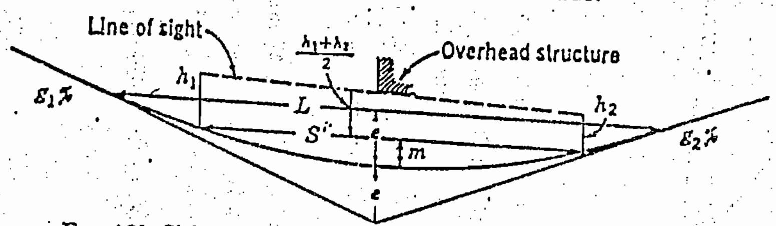
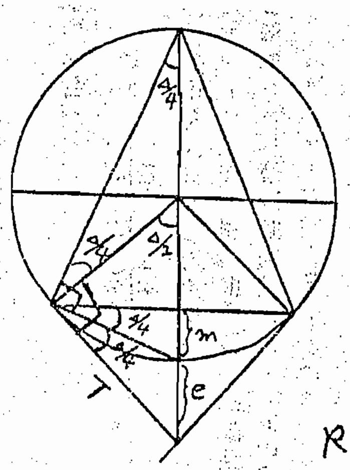
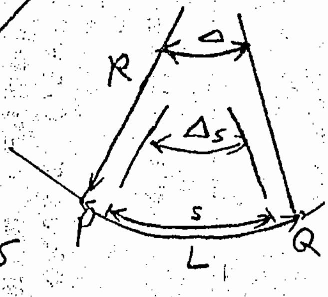


FIG. 109. Sight distance under overhead structure where $S < L$.





② 凹形豎曲線 $S<L$

Since any flat probola is closely a circle

assume R = average radius of the verticle curve

Δ, Δ_s = central angles subtended by L & S

(a) For a probola, $e = \frac{AL}{8}$

For a circle, $e = T \tan\frac{\Delta}{4} = (R\tan\frac{\Delta}{2})\tan\frac{\Delta}{4}$

Assume $\tan\frac{\Delta}{2} \approx \frac{\Delta}{2}$, $\tan\frac{\Delta}{4} \approx \frac{\Delta}{4}$

then $e = R(\frac{\Delta}{2})(\frac{\Delta}{4}) = R\frac{\Delta^2}{8}$ (approx.)

set $e_{probola} = e_{circle}$

$$\frac{AL}{8} = \frac{R\Delta^2}{8} \Rightarrow \Delta^2 = \frac{AL}{R} \quad \text{——(1)}$$

(b) Assume $m_{probola} = m_{circle}$ then we can write

$$m = R\sin\frac{\Delta_s}{2} \times \tan\frac{\Delta_s}{4}$$

Also assume

$$\sin\frac{\Delta_s}{2} = \frac{\Delta_s}{2}, \quad \tan\frac{\Delta_s}{4} = \frac{\Delta_s}{4}$$

$$\Rightarrow m = R\frac{\Delta_s^2}{8} \text{ (approx.)} \quad \text{——(2)}$$

(c) Combine eqs (1) & (2)

$$\left(\frac{\Delta}{\Delta_s}\right)^2 = \frac{AL}{8m}$$

Also note that $L = R\Delta$, $S = R\Delta_s$

$$\Rightarrow \frac{\Delta}{\Delta_s} = \frac{L}{S} \Rightarrow \left(\frac{\Delta}{\Delta_s}\right)^2 = \left(\frac{L}{S}\right)^2 = \frac{AL}{8m}$$

$$\therefore L = \frac{S^2 A}{8m}$$

$$m + \frac{h_1+h_2}{2} = C$$

$$\therefore L = \frac{S^2 A}{8\left(C - \frac{h_1+h_2}{2}\right)}$$

AASHTO Recommends

set $C = 14.5$ ft,
$h_1 = 6$ ft
$h_2 = 1.5$ ft

$$\Rightarrow L = \frac{S^2 A}{86}$$

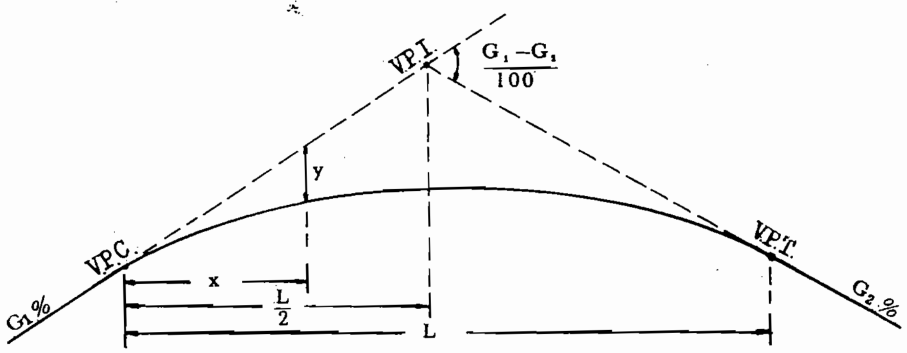
8.6 竪曲線之設置法

由於公路長度乃取水平距離，且公路之坡度均甚平緩，爲計算簡便計，可假定拋物線頂點之軸線爲垂直。若此，竪曲線上某點至切線之垂直支距（y）與該點至竪曲線之起點水平距離（x）之平方成正比。參閱圖八～8，G_1及G_2爲竪曲線前後端之縱斷坡度百分比，上坡爲正，下坡爲負，由竪曲線之座標公式及m＝0，h＝0得

$$y=-\frac{G_1-G_2}{200L}x^2 \quad \cdots\cdots (8\sim14)$$

則曲線上任何一點均可由式（8～14）求得之。普通每隔10公尺，或20公尺，求其相對之高度。

設計竪曲線時應注意不得使凸形或凹形竪曲線置入曲率半徑較小之平曲線上。前者將使駕駛人感到前面見不到路線方向之變更，尤以夜間行車更甚，後者將使駕駛人感到前面公路變形，同時，在坡底之行車速率通常較高，易生危險。在公路交叉處，應儘量採用平緩的竪曲線。



圖八～8　竪曲線之佈置

例題八～1　設有兩縱斷坡度，一爲3％之降坡，另一爲4％之升坡，兩坡相交之里程爲105^K+040，其高程爲＋78.5公尺，若所需之視距爲120公尺，試於其間設置一竪曲線。

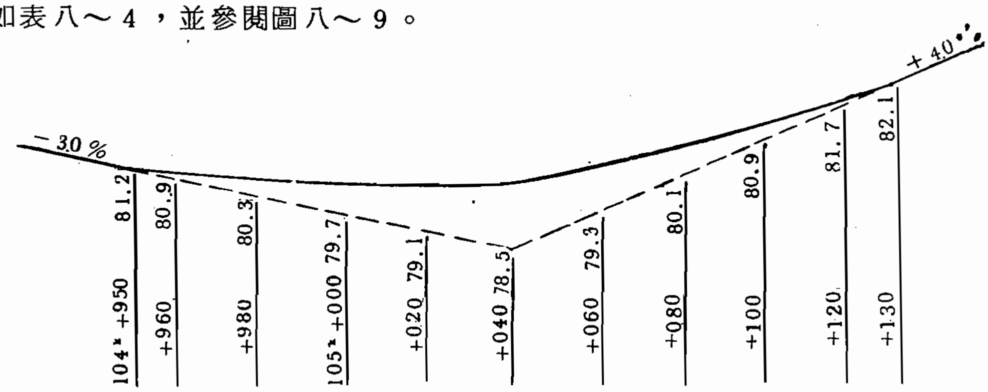
解：由式（8～10）得

$$L=-\frac{(G_1-G_2)S^2}{150+3.5S}=-\frac{(-3-4)\times120^2}{150+3.5\times120}=180\text{公尺}$$

並由式（8～14）

$$y=-\frac{G_1-G_2}{200L}x^2=\frac{3+4}{200\times180}x^2=0.0001945x^2$$

於坡度變遷點之前後各爲90公尺，每隔20公尺取相對之縱距，其計算如表八～4，並參閱圖八～9。



圖八～9　凹形豎曲線

表八～4　豎曲線之計算

里　　程	至曲線始終點之距離(公尺)	坡度上應塡之高度(公尺) $y=0.0001945x^2$	坡路上高程(公尺)	曲線上高程(公尺)
104^k+950	0	0	81.20	81.20
+960	10	0.02	80.90	80.92
+980	30	0.18	80.30	80.48
105^k+000	50	0.49	79.70	80.19
+020	70	0.95	79.10	80.05
+040	90	1.58	78.50	80.08
+060	70	0.95	79.30	80.25
+080	50	0.49	80.10	80.59
+100	30	0.18	80.90	81.08
+120	10	0.02	81.70	81.72
+130	0	0	82.10	82.10

另一求豎曲線中間各點高程之簡便方法如下：

於式(1)中並參照圖八～10

設 $x = L_1$ 時，則

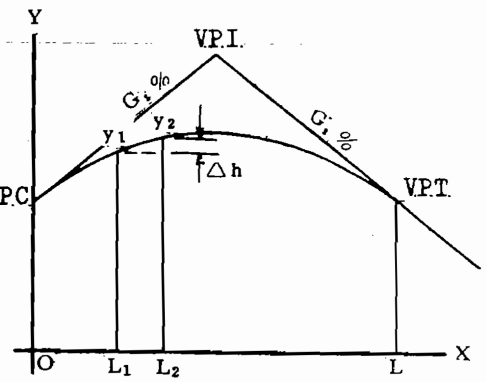
$$y_1 = \frac{G_2 - G_1}{200\,L} L_1^2 + \frac{G_1}{100} L_1 + h$$

又 $x = L_2$ 時，則

$$y_2 = \frac{G_2 - G_1}{200\,L} L_2^2 + \frac{G_1}{100} L_2 + h$$

若

$$\triangle h = y_2 - y_1$$



圖八～10　豎曲線

$$= (L_2^2 - L_1^2)\frac{G_2 - G_1}{200\,L} + (L_2 - L_1)\frac{G_1}{100}$$

$$= (L_2 - L_1)\left[(L_2 + L_1)\frac{G_2 - G_1}{200\,L} + \frac{G_1}{100}\right] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (8\sim15)$$

式中：L_1，L_2 ＝由豎曲線起點至任意點之前後距離。

$\triangle h = L_1$，L_2 處之豎曲線高程差。

例題八～2　按例題八～1 求豎曲線上各中間點之高程。

解：由式（8～15）得

$$\triangle h = (L_2 - L_1)\left[(L_2 + L_1)\frac{4+3}{200 \times 180} + \frac{-3}{100}\right]$$

$$= (L_2 - L_1)\left[0.0001945\,(L_2 + L_1) - 0.03\right]$$

其計算詳見表八～5：

8·7　縱斷面與豎曲線的配合

為使車輛從一縱坡度線駛至另一縱坡度線有平緩舒順且能增加行車安全及外形美觀的效用是為設置豎曲線的主要目的。為達成此等目的，無論凸形或凹形豎曲線所選用的長度應較計算而得者為大，並應避免坡度的突然折斷

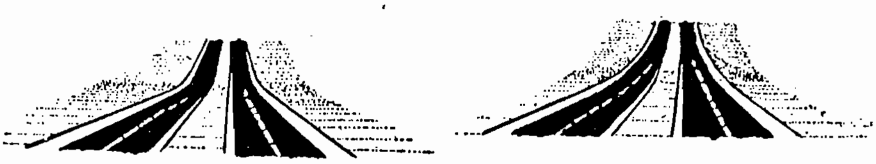
公路平面與縱斷面須以三度空間的觀念配合設計才能增進效用、安全、外觀美化並促使行駛速率均勻。下列示幾種應避免的設計：

圖八～11A示兩縱斷坡度間接一短豎曲線，駕駛人常會感到沒有豎曲線的存在，而係兩縱斷坡度直接銜接之折曲現象；如若將之改用較長的豎曲線

表八～5　豎曲線之計算

里　　程	L_2	L_1	L_2-L_1	L_2+L_1	△h	h
104^k+950	0	0	0	0	0	81.20
+960	10	0	10	10	−0.28	80.92
+980	30	10	20	40	−0.44	80.48
105^k+000	50	30	20	80	−0.29	80.19
+020	70	50	20	120	−0.13	80.06
+040	90	70	20	160	+0.02	80.08
+060	110	90	20	200	+0.18	80.26
+080	130	110	20	240	+0.33	80.59
+100	150	130	20	280	+0.49	81.08
+120	170	150	20	320	+0.64	81.72
105^K+130	180	170	10	350	+0.38	82.10

如圖八～11 B 則無此種現象而能令人感到平緩舒順。



A　　B

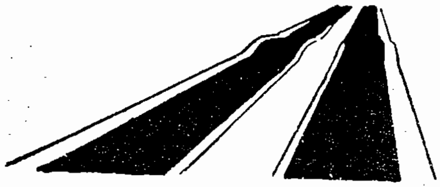
圖八～11　豎曲線長度在三度空間上的視感效果

圖八～ 12 示兩凹形豎曲線間連接一短切線即所謂的破背坡度線，常使

圖八～12　兩凹形豎曲線間之切線太短

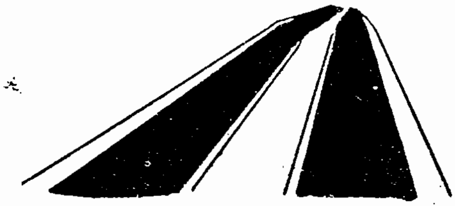
駕駛人會有侷促之感，最常見於橋樑與引道連接處，遇此情形最好應與道路連成一條曲線。

涵洞或短橋位於平坦的地形上，爲了節省引道填方，遂造成一種狀似駝峯的視感，如圖八～13 所示。



圖八～13 駝峯視感

圖八～14 示兩縱斷坡度差小，接一小凸形豎曲線，頂點後之道路可被看見，在視感上感到有折曲而不平順。



圖八～14 短凸形豎曲線有折曲感