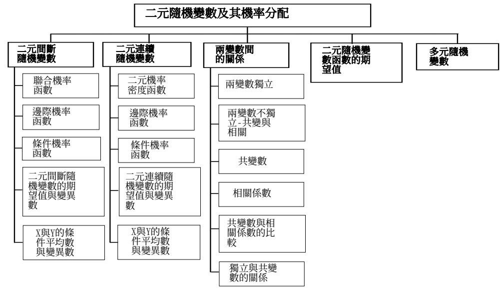
8 二元隨機變數及其機率分配

學習目的

1. 定義或了解二元間斷隨機變數與連續隨機變數的意義及其機率分配。
2. 了解邊際機率分配與條件機率分配。
3. 了解兩變數間的關係。
4. 了解二元隨機變數函數的期望值。
5. 了解多元隨機變數。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2000

本章結構



二元間斷隨機變數

- 聯合機率函數

設 X,Y 為二元間斷隨機變數， X 之值為 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，
Y 之值為 $y_1,y_2,\cdots y_m$，若 $f(x_i,y_j)$ 滿足機率的二條件：

①$0\le f(x_i,y_j)\le 1$

②$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i,y_j)=1$

則 $f(x_i,y_j)$ (簡單表示為 $f(x,y)$)為聯合機率函數。

二元間斷隨機變數

- X 的邊際機率函數

$$f_x(x)=\sum_y f(x,y)=f(x,y_1)+f(x,y_2)+\cdots+f(x,y_n)$$

上式必須滿足下列兩條件：

①$0\le f_x(x_i)\le 1$

②$\sum_{i=1}^{n} f_x(x_i)=1$

二元間斷隨機變數

- Y 的邊際機率函數

$$f_y(y)=\sum_x f(x,y)=f(x_1,y)+f(x_2,y)+\cdots+f(x_n,y)$$

上式必須滿足下列兩條件：

①$0\le f_y(y_j)\le 1$

②$\sum_{j=1}^{m} f_y(y_j)=1$

二元間斷隨機變數

- 條件機率函數

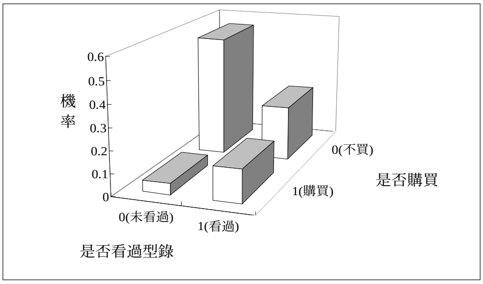
設 $f(x,y)$ 為二元機率函數，則在 $Y=y_j$ 條件下，發生x_i的條件機率表為：

$$f(x_i\,|\,Y=y_j)=\frac{f(x_i,y_j)}{f_y(y_j)}$$

在 $X=x_i$ 條件下，發生y_j的條件機率表為：

$$f(y_j\,|\,X=x_i)=\frac{f(x_i,y_j)}{f_x(x_i)}$$

圖8.1 X 與 Y 的聯合機率分配圖



二元間斷隨機變數的期望值

- X 的期望值

$$E(X)=\sum_x\sum_y xf(x,y)$$
$$=\sum_x x\sum_y f(x,y)=\sum_x xf_x(x) \qquad (8.5)$$

- Y 的期望值

$$E(Y)=\sum_x\sum_y yf(x,y)$$
$$=\sum_y y\sum_x f(x,y)=\sum_y yf_y(y) \qquad (8.6)$$

二元間斷隨機變數的變異數

- X 的變異數

$$V(X)=\sum_x\sum_y (x-\mu_x)^2 f(x,y)$$
$$=\sum_x (x-\mu_x)^2 f_x(x)$$
$$=\sum_x x^2 f_x(x)-\mu_x^2 \qquad (8.7)$$

- Y 的變異數

$$V(Y)=\sum_x\sum_y (y-\mu_Y)^2 f(x,y)$$
$$=\sum_y (y-\mu_Y)^2 f_y(y)$$
$$=\sum_y y^2 f_y(y)-\mu_Y^2 \qquad (8.8)$$

條件平均數與變異數

- X 的條件平均數與變異數

$$E(X|Y=y_j)=\sum_x xf(x|Y=y_j)$$
$$V(X|Y=y_j)=E[X-E(X|Y=y_j)]^2$$
$$=E(X^2|Y=y_j)-[E(X|Y=y_j)]^2$$

- Y 的條件平均數與變異數

$$E(Y|X=x_i)=\sum_y yf(y|X=x_i)$$
$$V(Y|X=x_i)=E[Y-E(Y|X=x_i)]^2$$
$$=E(Y^2|X=x_i)-[E(Y|X=x_i)]^2$$

二元連續隨機變數

- 二元機率密度函數

設 X,Y 為二元連續隨機變數，$a\le x\le b$，$c\le y\le d$，若 $f(x,y)$ 滿足下列二條件：

① $f(x,y)\ge 0$

② $\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx=1$

則 $f(x,y)$ 為一個二元機率密度函數。

二元連續隨機變數

- X 與 Y 的邊際機率密度函數

X 邊際機率密度函數 $f_x(x)$ 為：

$$f_x(x)=\int_y f(x,y)dy$$

它必須滿足機率的二條件① $f_x(x)\ge 0$ ② $\int_x f_x(x)dx=1$。

Y 邊際機率密度函數 $f_y(y)$ 為：

$$f_y(y)=\int_x f(x,y)dx$$

它必須滿足機率的二條件① $f_y(y)\ge 0$ ② $\int_y f_y(y)dy=1$。

二元連續隨機變數

- **X 與 Y 的條件機率密度函數**

  $Y=y$ 條件下，X 的條件機率密度函數 $f(x\mid y)$ 為：

  $$f(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_y(y)} \qquad (8.15)$$

  它必須滿足機率的二條件 ① $f(x\mid y)\geq 0$ ② $\int_x f(x\mid y)dx=1$。

  $X=x$ 條件下，Y 的條件機率密度函數 $f(y\mid x)$ 為：

  $$f(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_x(x)} \qquad (8.16)$$

  它必須滿足機率的二條件 ① $f(y\mid x)\geq 0$ ② $\int_y f(y\mid x)dy=1$。

二元連續隨機變數的期望值

- **X 與 Y 的期望值**

  $$E(X)=\int_x\int_y xf(x,y)dydx=\int_x xf_x(x)dx$$
  $$E(Y)=\int_x\int_y yf(x,y)dydx=\int_y yf_y(y)dy$$

二元連續隨機變數的變異數

- **X 與 Y 的變異數**

  $$V(X)=\int_x\int_y(x-\mu_x)^2 f(x,y)dydx=E(X^2)-(E(X))$$
  $$V(Y)=\int_x\int_y(y-\mu_y)^2 f(x,y)dydx=E(Y^2)-(E(Y))^2$$

二元連續隨機變數的條件平均數與變異數

- **X 的條件平均數與變異數**

  $$E(X\mid y)=\int_x xf(x\mid y)dx$$
  $$\begin{aligned}V(X\mid y)&=E\left[(x-E(X\mid y))^2\right]\\&=\int_x(x-E(X\mid y))^2 f(x\mid y)dx\\&=\int_x x^2 f(x\mid y)dx-\left[E(X\mid y)\right]^2\end{aligned}$$

二元連續隨機變數的條件平均數與變異數

- **Y 的條件平均數與變異數**

  $$E(Y\mid x)=\int_y yf(y\mid x)dy$$
  $$\begin{aligned}V(Y\mid x)&=E\left[(y-E(Y\mid x))^2\right]\\&=\int_y(y-E(Y\mid x))^2 f(y\mid x)dy\\&=\int_y y^2 f(y\mid x)dy-\left[E(Y\mid x)\right]^2\end{aligned}$$

兩變數間的關係

- **兩變數獨立的條件**

  設 X,Y 為二元隨機變數，若 X 與 Y 之值均滿足下列任一條件，則 X,Y 獨立。

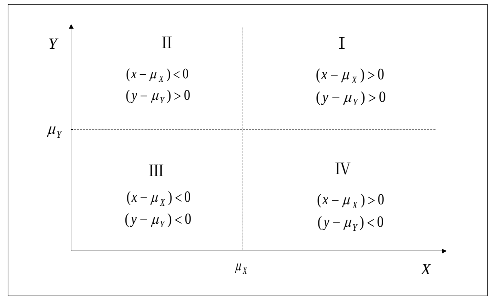
  ① $f(x,y)=f_x(x)\cdot f_y(y)$
  ② $f(x\mid y)=f_x(x)$
  ③ $f(y\mid x)=f_y(y)$

兩變數間的關係

- 共變數

$$Cov(X,Y)=E[X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

表8.10 *COV(X,Y)*的符號



兩變數間的關係

- 相關係數

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$$

式中：$Cov(X,Y)$為共變數，σ_X，σ_Y為標準差。

二元隨機變數函數的期望值

- 二元隨機變數線性函數的期望值

$$E(aX\pm bY)=aE(X)\pm bE(Y)$$

- 二元隨機變數線性函數的變異數

$$V(aX\pm bY)=a^2V(X)+b^2V(Y)\pm 2abCov(X,Y)$$

多元隨機變數

- 多元機率分配的條件

①$0\le f(x_1,x_2,\cdots,x_6)\le 1$

②$\sum_{x_1}\sum_{x_2}\cdots\sum_{x_6} f(x_1,x_2,\cdots,x_6)=1$

多元隨機變數

- 多元隨機變數函數的期望值

$$E(W)=\sum_{i=1}^{K}a_iE(X_i)$$

- 多元隨機變數函數的變異數

$$V(W)=\sum_{i=1}^{K}a_i^2V(X_i)+\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}a_ia_jCov(X_i,X_j)\ ,\ i\neq j$$