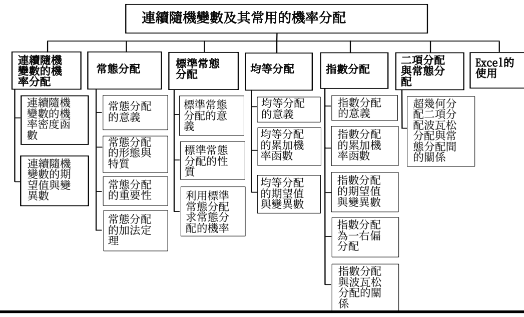
7 連續隨機變數及其常用的機率分配

學習目的

1. 熟悉並計算連續機率分配機率函數的期望值與變異數。
2. 了解常態分配的意義、特質與重要性。
3. 了解標準常態分配的意義、性質與利用標準常態分配求算機率。
4. 了解均等分配、指數分配的意義及性質並計算其期望值與變異數。
5. 比較超幾何分配、二項分配、波瓦松分配與常態分配。
6. 利用Excel求算各個連續機率分配並繪製圖形。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2000

本章結構



連續隨機變數的機率分配

- **機率密度函數**

  設X為連續隨機變數，其值為 $a \le X \le b$，若 $f(x)$ 滿足下列二條件：

  ① $f(x) \ge 0$　② $\int_a^b f(x)dx = 1$

  則 $f(x)$ 為X的機率密度函數(probability density function)，簡稱pdf。
- **累加機率函數**

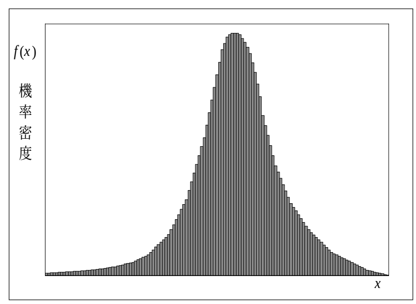
  $F(X=x) = P(X \le x) = \int_a^x f(x)dx$
- **期望值**

  $E(X) = \int_a^b xf(x)dx = \mu \qquad (a \le X \le b)$
- **變異數**

  $V(X) = \sigma_X^2 = \int_a^b (x-\mu)^2 \cdot f(x)dx$
- **標準差**

  $\sigma = \sqrt{V(X)}$

圖7.3 機率曲線



常態分配

- **常態分配的定義**

  設X為連續隨機變數，若其機率密度函數為：

  $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty < x < \infty$$

  式中：$-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$，$\pi = 3.1416$，$e = 2.7183$。

  則稱此 $f(x)$ 為常態分配。

常態分配

- **常態分配的特質**

  ①常態分配 $f(x)$ 為以μ 為中心的對稱分配。

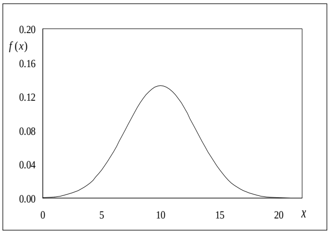
  ②常態分配曲線下面的面積總和等於1。

  ③常態分配 $f(x)$ 在 $X = \mu \pm \sigma$ 時有一轉折點。

  ④常態分配曲線的兩尾無限延伸。

  ⑤常態分配的機率範圍可分為三種情況。

圖7.6 常態分配圖



上圖為平均數 μ＝10，標準差為 σ＝3的常態分配。

常態分配

- **常態分配的機率範圍**

  ①常態隨機變數的值落在離開平均數1個標準差等距的範圍(即 $\mu\pm\sigma$)之機率為：

  $$P(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma) = 0.6826$$

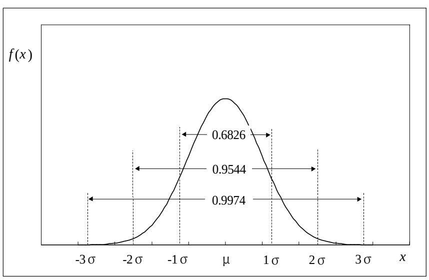
  ②常態隨機變數的值落在離開平均數2個標準差等距的範圍(即 $\mu\pm 2\sigma$)之機率為：

  $$P(\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma) = 0.9544$$

  ③常態隨機變數的值落在離開平均數3個標準差等距的範圍(即 $\mu\pm 3\sigma$)之機率為：

  $$P(\mu-3\sigma < X < \mu+3\sigma) = 0.9974$$

圖7.12 常態分配的機率範圍



常態分配

- **常態分配的重要性**

  ①常態分配可做為在統計推論程序中的基本模式

  ②常態分配可進行許多統計推論

  ③常態分配構成大樣本推論統計的基礎

  ④間斷機率分配在某些條件下可利用常態分配求其近似值

常態分配

- **常態分配的加法定理**

  定理1 設 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，若 $W = a + bX$ 則

  $$W \sim N(a+b\mu, b^2\sigma^2)$$

  定理2 設 $X \sim N(\mu_X,\sigma_X^2)$，$Y \sim N(\mu_Y,\sigma_Y^2)$ 且 X、Y 獨立，若

  $$W = aX + bY$$

  則

  $$W \sim N(a\mu_X + b\mu_Y, a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2)$$

標準常態分配

- **標準常態分配**

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Z^2}{2}}$$

式中 $Z = (X-\mu)/\sigma$ 標準常態變數。標準常態分配其平均數為0，變異數為1。一般以 $Z \sim N(0,1)$ 來表示。

圖7.13 標準常態曲線

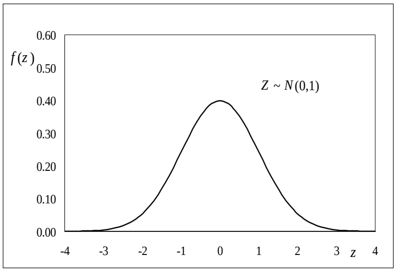


表7.4 標準常態機率分配表

	z 的第二位小數									
z	**.00**	**.01**	**.02**	**.03**	**.04**	**.05**	**.06**	**.07**	**.08**	**.09**
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633

圖7.14 標準常態分配機率(0與z_0間)

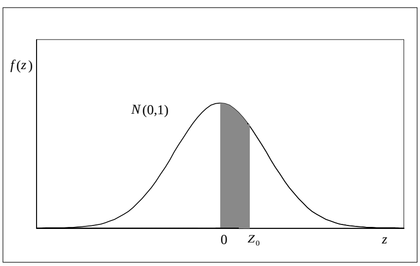
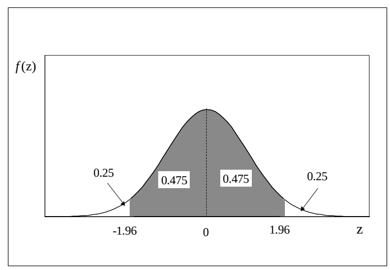


圖7.23 $-z_0 < Z < z_0$的標準常態機率值



標準常態分配

❍利用常態分配求常態分配機率

①將隨機變數 X 化為標準隨機變數 Z 。同時將 a 值與 b 值標準化：

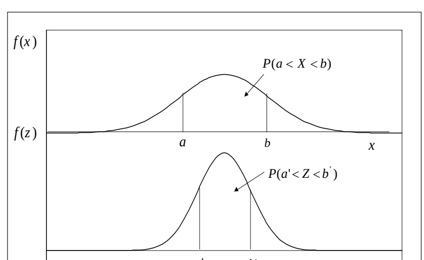
$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma},\quad a'=\frac{a-\mu}{\sigma},\quad b'=\frac{b-\mu}{\sigma}$$

②其次，將 Z，a'，b' 代入 $P(a<X<b)$，即

$$P(a<X<b)=P(\frac{a-\mu}{\sigma}<\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{b-\mu}{\sigma})$$
$$=P(a'<Z<b')$$

③依照查標準常態分配機率值表的方法查表，即可求得機率值。

圖7.24 常態分配與標準常態分配



均等分配

- **機率密度函數**

$$f(x)=\frac{1}{b-a} \qquad a\le X\le b$$
$$=0 \qquad \text{其他}$$

- **累加機率函數**

$$F(x)=P(X\le x)=\frac{x-a}{b-a}$$

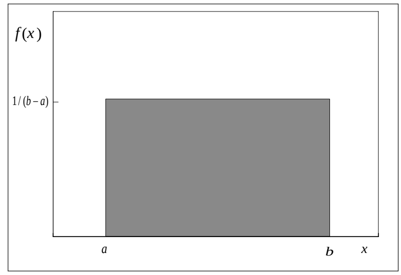
- **期望值**

$$E(X)=\frac{b+a}{2}$$

- **變異數**

$$V(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

圖7.34 均等分配



指數分配

- **指數分配**

若X為連續的隨機變數，其機率密度函數為：

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x} \qquad x\ge 0, \lambda>0$$

則 $f(x)$ 為指數分配。式中：λ 為單位時間事件發生的平均數。

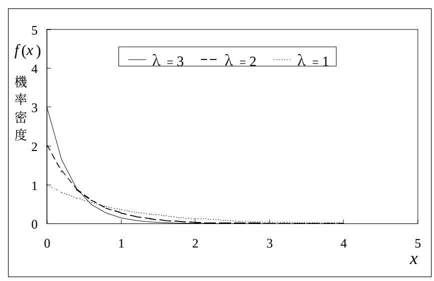
- **期望值**

$$E(X)=\frac{1}{\lambda}$$

- **變異數**

$$V(X)=\frac{1}{\lambda^2}$$

圖7.37 指數分配



二項分配與常態分配

表7.5 二項分配與常態分配

	A	B	C	D
1	x	二項	常態	
2	0	0.000244	0.000571	
3	1	0.00293	0.00357	
4	2	0.016113	0.016083	
5	3	0.053711	0.05139	
6	4	0.12085	0.116254	
7	5	0.193359	0.194873	
8	6	0.225586	0.230336	
9	7	0.193359	0.194873	
10	8	0.12085	0.116254	
11	9	0.053711	0.05139	
12	10	0.016113	0.016083	
13	11	0.00293	0.00357	
14	12	0.000244	0.000571	

圖7.43 二項分配與常態分配