6 間斷隨機變數及其常用的機率分配

學習目的

1. 定義或了解隨機變數的意義及其機率分配。
2. 區分間斷隨機變數與連續隨機變數。
3. 計算間斷隨機變數的期望值、變異數及標準差。
4. 熟悉二項分配意義與特性，及其在日常生活上的應用。
5. 了解波瓦松分配的意義與特性，及其在日常生活上的應用。
6. 了解超幾何分配的意義與特性，及其在日常生活上的應用。
7. 比較波瓦松分配與二項分配。
8. 利用Excel求算各個分配並繪製圖形。

本章結構

- **間斷隨機變數及其常用的機率分配**
  - **隨機變數的意義與種類**
    - 隨機變數的意義
    - 隨機變數的種類
  - **間斷隨機變數的機率分配**
    - 間斷隨機變數的機率函數
    - 間斷隨機變數的期望值與變異數
    - 標準化隨機變數
    - 隨機變數函數的期望值及變異數
  - **二項機率分配**
    - 二項隨機實驗與二項分配
    - 二項機率分配的性質
    - 點二項分配
    - 二項分配可延伸為多項分配
  - **超幾何分配**
    - 超幾何實驗與超幾何分配
    - 超幾何分配的性質
  - **波瓦松分配**
    - 波瓦松實驗與波瓦松分配
    - 波瓦松分配的特性
    - 波瓦松分配與二項分配
  - **幾何分配**
    - 幾何分配的定義
    - 幾何分配的特性
  - **Excel的使用**

隨機變數的意義與種類

❍ 隨機變數的意義

隨機變數是隨機實驗中對應樣本點的實數值函數。

❍ 隨機變數的種類

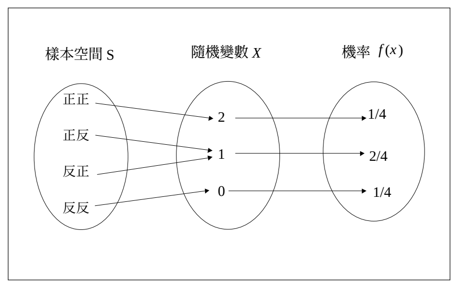
間斷隨機變數

隨機變數的變量其個數是有限的，或個數是無限但可數的稱為間斷或不連續隨機變數。

連續隨機變數

隨機變數的變量其個數為無限且不可數的稱為連續隨機變數。

圖6.1　隨機變數



單一間斷隨機變數的機率分配

❍ 意 義

單一間斷隨機變數的機率分配是表示，一元間斷隨機變數的各個變量的發生機率(或相對次數)的分布情形，包括機率函數、期望值、變異數與標準差等。

❍ 機 率 函 數

設間斷隨機變數X，其變量為$x_1,\cdots,x_n$，對應X的每一數值有唯一機率與之對應，該機率值表為$f(X=x_i)$或$f(x_i)$，並滿足下列兩個條件：

① $0 \le f(x_i) \le 1$

② $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$

則$f(x)$為X之機率函數或稱機率分配。

表6.3　間斷隨機變數

隨機實驗	隨機變數	隨機變數 X 可能的值
一枚銅板擲兩次	出現正面的次數	0,1,2
抽取 10 個產品檢查品質	不良品的個數	0,1,2,⋯,10
買車的顧客的性別	性別	0 為男性，1 為女性
餐廳一天的顧客	顧客人數	0,1,2,⋯

單一間斷隨機變數的機率分配

- **累加機率函數**

  $F(X=x_i)=F(x_i)=P(X\le x_i)=f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_i)$

- **期望值**

  $E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i f(x_i)=\mu$

  式中：X為間斷隨機變數，$f(x_i)$為機率函數。

- **變異數**

  $V(X)=\sum_{i=1}^{n}\left[x_i-E(X)\right]^2 f(x_i)$　或　$V(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 f(x_i)$

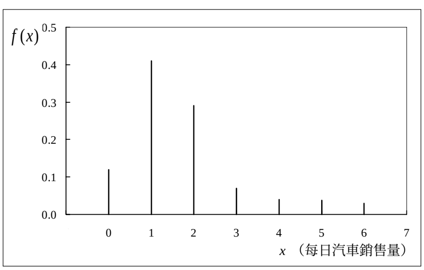
- **標準差**

  $\sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 . f(x_i)}$

表6.9　台鈴汽車每日銷售量的機率分配

x(隨機變量)	$f(x)$(機率函數)	$xf(x)$	$F(x)$(累加機率)
0	0.12	0.00	0.12
1	0.41	0.41	0.53
2	0.29	0.58	0.82
3	0.07	0.21	0.89
4	0.04	0.16	0.93
5	0.04	0.20	0.97
6	0.03	0.18	1.00

圖6.2　汽車銷售量的機率分配



單一間斷隨機變數的機率分配

- **標準化變數(Z變數)**

  設X為一隨機變數，其平均數為μ，變異數為σ^2，令

  $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$

  則Z為一標準化變數。

表6.15　標準化隨機變數表

隨機變量 x	標準化變量 $Z=\frac{x-\mu}{\sigma}=\frac{x-1.74}{1.37}$
0	-1.27
1	-0.54
2	0.19
3	0.92
4	1.65
5	2.38
6	3.11

單一間斷隨機變數函數的期望值與變異數

- **線性函數的期望值**

  設$Y=a+bX$，則Y的期望值(平均數)為：

  $E(Y)=E(a+bX)=a+bE(X)$

- **線性函數的變異數**

  設$Y=a+bX$，則Y的變異數為：

  $V(Y)=V(a+bX)=V(bX)=b^2V(X)$

二元間斷隨機變數

- **聯合機率函數**

  設 X、Y 為間斷隨機變數，X 之值為 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，Y 之值為 $y_1,y_2,\cdots y_m$，則 $f(x,y)$ 為二元聯合機率函數。

- **X的邊際機率函數**

  $f_x(x)=\sum_y f(x,y)=f(x,y_1)+f(x,y_2)+\cdots+f(x,y_n)$

- **Y的邊際機率函數**

  $f_y(y)=\sum_x f(x,y)=f(x_1,y)+f(x_2,y)+\cdots+f(x_n,y)$

- **條件機率函數**

  $f(x_i\mid Y=y_i)=\dfrac{f(x_i,y_i)}{f_y(y_i)}$

  在 $X=x_i$ 條件下，發生 y_i 的條件機率表為：

  $f(y_i\mid X=x_i)=\dfrac{f(x_i,y_i)}{f_x(x_i)}$

二項機率分配

- **意義**

  設X為一間斷隨機變數，若 $f(x)$ 為：

  $f(x)=C_x^n p^x q^{n-x}$　　　　$x=0,1,2,\cdots,n$

  則 $f(x)$ 為一二項機率分配。式中：$C_x^n=\dfrac{n!}{x!(n-x)!}$，$n$：試行次數，$x$：成功的次數，$p$：成功的機率，$q$：失敗的機率$=1-p$

- **期望值**

  $E(X)=np$

- **變異數**

  $V(X)=npq$

- **標準差**

  $\sigma=\sqrt{npq}$

圖6.5　二項隨機實驗的樹枝圖

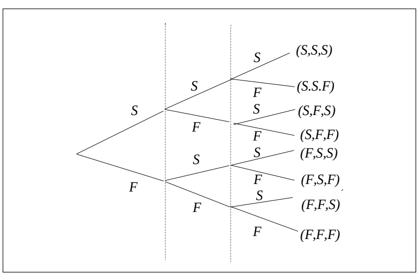
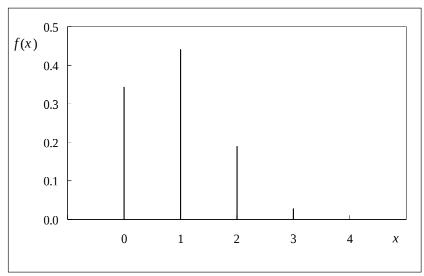


圖6.7　二項機率分配圖



超幾何分配

- **超幾何分配**

  $f(x)=\dfrac{C_x^K C_{n-x}^{N-K}}{C_n^N}$　　$x=0,1,\cdots,n$　　$x\le K$　　$x\ge K+n-N$

- **期望值**

  $E(X)=n\cdot\dfrac{K}{N}$

- **變異數**

  $V(X)=n\cdot\dfrac{K}{N}\cdot\dfrac{N-K}{N}\cdot\dfrac{N-n}{N-1}$

表6.22　超幾何實驗

$N=$ 母體元素總數	隨機抽取	$n=$ 樣本數
$K=$ 成功的次數	$\rightarrow$	$x=$ 成功的次數
$N-K=$ 失敗的次數	抽出不放回	$n-x=$ 失敗的次數

Poisson(波瓦松)分配

- **波瓦松分配**

  設已知在一定的區間發生事件A的期望值為λ， 令X為該區間發生事件的次數，則：

  $$f(x)=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \qquad x=0,1,2,\cdots,\infty$$

  此即為波瓦松分配，其參數為λ 。

- **期望值**

  $E(X)=\lambda$

- **變異數**

  $V(X)=\lambda$

表6.24 $\lambda=4$的波瓦松機率分配

	A	B	C	D
1	x	f(x)		
2	0	0.018316		
3	1	0.073263		
4	2	0.146525		
5	3	0.195367		
6	4	0.195367		
7	5	0.156293		
8	6	0.104196		
9	7	0.05954		
10	8	0.02977		
11	9	0.013231		
12	10	0.005292		
13	11	0.001925		
14	12	0.000642		
15	13	0.000197		
16	14	5.64E-05		

1.在A2輸入0，然後選取「編輯」、「填滿」、「數列」，按確定。接著在數列對話方塊輸入資料如圖6.6，但中止值為14。
2.在B2輸入公式＝POISSON(A2,4,FALSE)，表示$\lambda=4$的波瓦松機率。然後拖拉至B16，可得B欄的波瓦松機率。
3.由上表可知，發生車禍4件的機率為0.1953(B6)，發生車禍0件(A2)的機率為0.0183(B2)。

圖6.11 發生車禍的平均次數

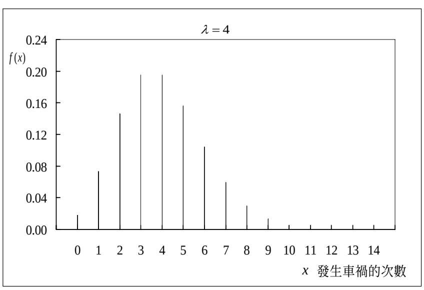


表6.25 二項分配與波瓦松分配

	A	B	C	D
1	x	二項分配	波瓦松分配	B-C
2	0	2.66E-05	4.54E-05	-1.88E-05
3	1	0.000295	0.000454	-0.000159
4	2	0.001623	0.00227	-0.000647
5	3	0.005892	0.007567	-0.001675
6	4	0.015875	0.018917	-0.003042
7	5	0.033866	0.037833	-0.003967
8	6	0.059579	0.063055	-0.003477
9	7	0.088895	0.090079	-0.001184
10	8	0.114823	0.112599	0.002224
11	9	0.130416	0.12511	0.005306
12	10	0.131865	0.12511	0.006755

1.開啟工作表。在A1鍵入X表示成功的次數(二項分配)或單位時間事件發生的次數(波瓦松分配)。在A2鍵入0，然後選取「編輯」、「填滿」、「數列」，按確定。接著在數列對話方塊輸入間距1，中止值100，按確定。
2.在B1鍵入二項分配，B2輸入＝BINOMDIST(A2,100,0.1,FALSE)表示實驗100次，成功機率0.1的二項機率。然後拖拉至A102。
3.在C2輸入公式＝POISSON(A2,10,FALSE)表示$\lambda=np=100 \times 0.1=10$的波瓦松的機率。然後拖拉至B102。其餘步驟如圖6.3。

圖6.15 二項分配與波氏分配