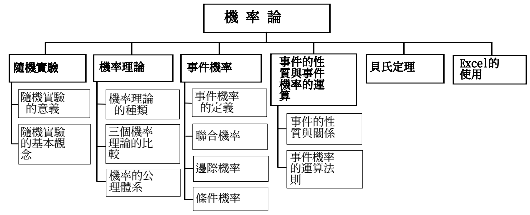
5 機率論

學習目的

1. 定義機率。
2. 了解機率的基本觀念如隨機實驗，實驗結果，事件，樣本空間等。
3. 描述古典的機率理論、客觀的機率理論及主觀的機率理論。
4. 熟習聯合機率、邊際機率及條件機率的定義及其應用。
5. 學習獨立、不獨立與互斥事件間的相互關係。
6. 認識貝氏定理及應用貝氏定理。

本章結構



隨機實驗

- **隨機實驗的意義**

  隨機實驗是一種過程(process)，是一種不能確定預知會發生何種結果的實驗方式。在實驗前已知所有可能出現的結果，而實驗後的結果為所有可能的結果之一，但實驗前並未能正確的、肯定的預知它是何種結果。隨機實驗可重複進行，而經過長期重複實驗，出現的結果會遵循某一些統計規則。

隨機實驗的基本觀念

- **基本出象**

  隨機實驗的每個可能的結果稱為基本出象，又稱為樣本點。
- **樣本空間**

  一個隨機實驗中，所有可能出象的集合稱為樣本空間。通常以英文大寫字母*S*表示之。

表5.1 隨機實驗、出象與樣本空間

隨機實驗	出象	樣本空間
產品品質檢驗	良品，不良品	S = {良品, 不良品}
一場足球賽	贏，輸，和	S = {贏, 輸, 和}
丟一個骰子 1 次	1,2,3,4,5,6	S = {1,2,3,4,5,6}
新生小孩的性別	男性，女性	S = {男性, 女性}
參加研究所考試	錄取，未錄取	S = {錄取, 未錄取}

隨機實驗的基本觀念

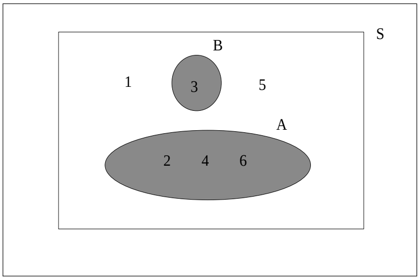
- **事件**

  樣本空間的部份集合稱為事件。
- **簡單事件**

  事件只包含一個基本出象者稱為簡單事件。
- **複合事件**

  事件包含二個或二個以上基本出象者稱為複合事件。

圖5.2　簡單事件與複合事件



機率理論

- 古典的機率理論

  $P(E)=\frac{1}{N}$

- 客觀的機率理論

  $P(E)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(E)}{n}$

  式中：$n(E)$ 表示事件E出現的次數，n表隨機實驗的總次數。

- 主觀的機率理論

  $P(E)=$[對事件E發生的信心]

機率的公理

- 公理一

  $0\le P(E_i)\le 1$，表示任一事件E_i 若可能發生，則其機率大於0小於1。若事件不發生，則其機率等於0。若事件一定發生，則機率等於1。

- 公理二

  $P(E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_n)=P(E_1)+P(E_2)+\cdots+P(E_n)$ ，$E_1,E_2,\cdots,E_n$ 互斥，表示若有n個互斥事件 $E_1,E_2,\cdots,E_n$，則E_1 發生或 E_2 發生或 E_n 發生的機率為其個別機率的和。

- 公理三

  $P(S)=1$，表示樣本空間中所有事件均發生的機率總合等於1。

事件機率

- 事件機率的定義

  設事件A定義於隨機實驗的樣本空間，其發生之機率$P(A)$為事件A之基本出象的機率總和，即 $P(A)=\sum P(E_i)$， $E_i\in A$ 。

- 聯合機率的定義

  二個或二個以上事件同時發生的機率稱為聯合機率。

- 邊際機率的定義

  在有二個或二個以上類別的樣本空間中，若僅考慮某一類別個別發生的機率者稱為邊際機率。

- 條件機率的定義

  令A、B為定義於樣本空間的事件，已知發生事件B之後再發生事件A的機率，稱為事件A的條件機率，可表示為：

圖5.5　事件A的條件機率

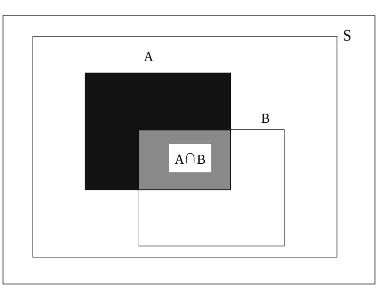
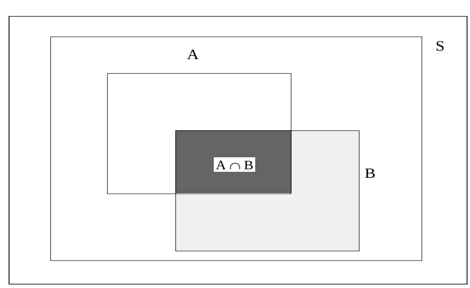


圖5.6　事件B的條件機率



事件的性質與關係

- **獨立事件**

  獨立事件係指一事件的發生不影響其他事件發生的機率。

- **兩事件獨立**

  若A、B兩事件合乎於下列任一條件，則A、B互為獨立。

  ① $P(A|B)=P(A)$ ② $P(B|A)=P(B)$ ③ $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

- **相依事件**

  相依事件係指一事件的發生影響其他事件發生的機率。

- **互斥事件**

  如果事件沒有共同的元素(樣本點)，則稱為互斥事件。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 1999

事件的性質與關係

- **加法定理**

  兩事件的聯集

  $$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

  如果事件A與事件B互斥，則

  $$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

- **乘法定理**

  二事件的交集

  $$P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A|B)$$

  如果A、B獨立($P(A|B)=P(A)$)，則

  $$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

- **分割定理(條件機率的情形)**

  若 $A_1,\cdots,A_r$ 為分割集合，B為一事件，則 $P(B)=\sum_{i=1}^{r}P(B\cap A_i)$，

  且由 $P(B\cap A_i)=P(A_i)\cdot P(B|A_i)$，故

  $$P(B)=\sum_{i=1}^{r}P(B\cap A_i)==\sum_{i=1}^{r}P(A_i)\cdot P(B|A_i)$$

貝氏定理

若已知 $A_1,\cdots,A_r$ 為樣本空間的分割集合，B為某事件，且已知 $P(A_i)$ 及 $P(B|A_i)$，則B條件下發生事件 A_i 之機率表為 $P(A_i|B)$：

$$P(A_i|B)=\frac{P(B\cap A_i)}{P(B)}=\frac{P(B\cap A_i)}{P(B\cap A_1)+P(B\cap A_2)+\cdots+P(B\cap A_r)}$$

$$=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+\cdots+P(A_r)P(B|A_r)}$$

式中：$P(A_i)$：事前機率，$P(B|A_i)$：概似機率，$P(A_i|B)$：事後機率。

圖5.10　貝氏定理的應用