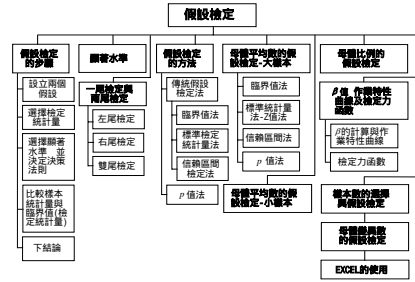


12 假設檢定

學習目的

1. 了解假設檢定的基本概念與型 錯誤與型 錯誤。
2. 學習假設檢定的進行的步驟。
3. 學習一尾與兩尾假設檢定的方法。
4. 學習傳統檢定方法與 p 值法。
5. 了解 β 值、作業特性曲線與檢定力函數。
6. 了解母體平均數的假設檢定的方法、步驟及其應用。
7. 了解母體比例、母體變異數的假設檢定的方法、步驟及其應用。
8. 了解檢定時，在控制 α 、 β 的水準下，樣本數的選擇。
9. 利用Excel 來做假設檢定。

本章結構



假設檢定

○ 假設檢定的意義

對有關母體參數的假設，利用樣本的訊息，決定接受(不拒絕)該假設或拒絕該假設的統計方法。

假設檢定的步驟

○ 假設檢定的步驟

- ① 步驟1 設立兩個假設
- ② 步驟2 選擇檢定統計量
- ③ 步驟3 選擇顯著水準及決定決策法則
- ④ 步驟4 比較樣本檢定統計量與檢定統計量
- ⑤ 步驟5 下結論

假設檢定的步驟

○ 兩個假設

① 虛無假設

對母體參數的某一假設或主張假定其為真實的(除非證明其為非真)一個假設稱為虛無假設。

② 對立假設

對立假設是相對於虛無假設而對母體參數提出的另一個不同的假設或主張。

設立假設的原則

- ① 將想要利用樣本統計量去驗證的假設設為對立假設，想要否定的假設設為虛無假設。
- ② 錯誤地拒絕某一假設的後果較錯誤地接受或不拒絕該某一假設的後果為嚴重者，將該假設設為虛無假設。
- ③ 將他人的主張做為虛無假設，亦即假定他人的主張是真實的。
- ④ 以反面主張做為虛無假設。

假設檢定的步驟

○ 兩個決策

① 不拒絕 H_0 (或接受 H_0)

若樣本統計量落在接受域，則「不拒絕」或「接受」虛無假設。

② 拒絕 H_0

若樣本統計量落在拒絕域，則「拒絕」虛無假設，推斷對立假設 H_1 為真。

假設檢定的步驟

○ 兩個錯誤

① 型I錯誤

當 H_0 為真，而拒絕 H_0 所發生的錯誤，稱為型I錯誤 (type I error)。型I錯誤的機率為 α ，表為

$$\alpha = P(\text{拒絕}H_0 | H_0 \text{為真})$$

又稱為顯著水準 (significance level)。

② 型II錯誤

當 H_0 為假 (或 H_1 為真)，而不拒絕 H_0 所發生的錯誤，稱為型II錯誤 (type II error)。型II錯誤的機率以 β 表示：

$$\beta = P(\text{II}) = P(\text{不拒絕}H_0 | H_0 \text{為假})$$

$1 - \beta$ 稱為檢定力，表示 H_0 為假，不拒絕 H_0 的機率。

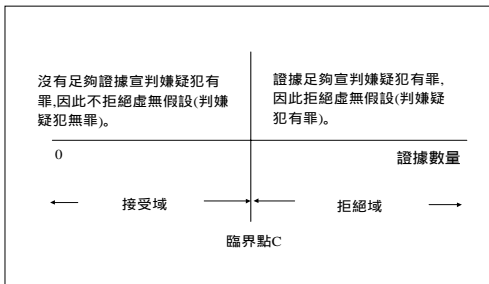
表12.1 假設檢定的行動與錯誤

決策(或行動)	情況	
	H_0 為真	H_1 為真
不拒絕 $H_0 (A_0)$	正確	型 錯誤
拒絕 $H_0 (A_1)$	型 錯誤	正確

表12.2 假設檢定決策正確與錯誤的機率

決策(或行動)	情況	
	H_0 為真	H_1 為真
不拒絕 $H_0 (A_0)$	$1 - \alpha$	β
拒絕 $H_0 (A_1)$	α	$1 - \beta$

圖12.2 法官判案時的拒絕域與接受域



假設檢定的決策法則

先設定可容許的 α (型 I 錯誤的機率)，再根據 α 水準決定臨界值。

圖12.3 臨界值與拒絕域及接受域

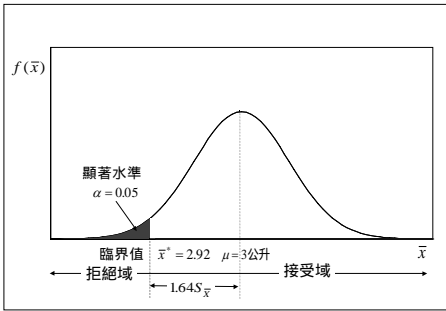


圖12.4 樣本平均數與臨界值的比較

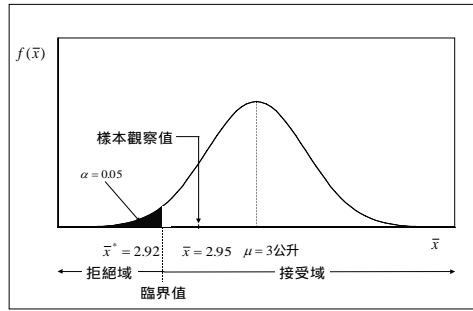


圖12.5 假設檢定的過程

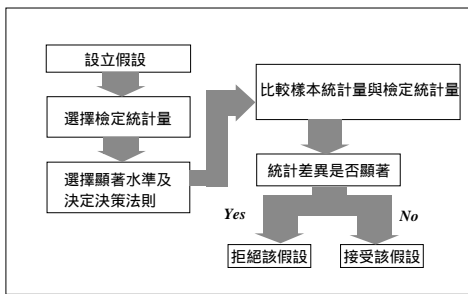
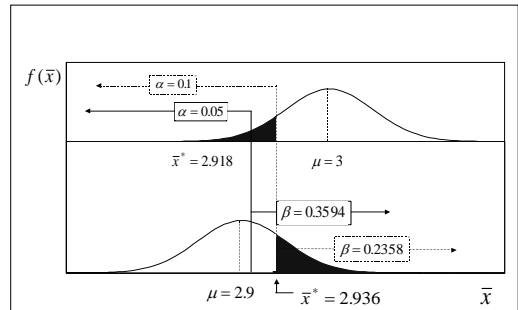


圖12.6 與 互為消長

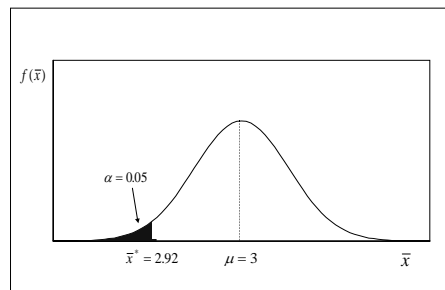


顯著水準

○ α 值

小的 α 值意思是指對 H_1 的檢定較嚴格，不輕易接受 H_1 。反之，大的 α 值是指對 H_1 的檢定較寬鬆，較易接受 H_1 。

圖12.8 顯著水準



一尾檢定與兩尾檢定

○ 一尾檢定

只有一個拒絕域的檢定稱為一尾檢定。拒絕域在左尾的稱為左尾檢定，拒絕域在右尾的尾檢定稱為右尾檢定。

○ 兩尾檢定

有兩個拒絕域的檢定稱為兩尾檢定，兩尾各有一個拒絕域。

圖12.9 左尾檢定

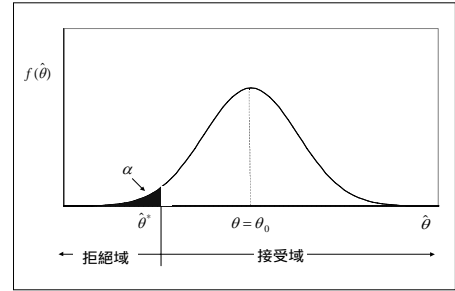


圖12.11 右尾檢定

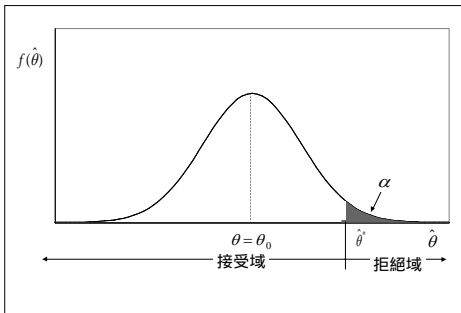


圖12.13 雙尾檢定

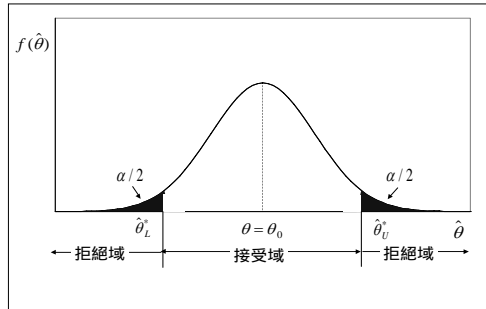


表12.3 假設檢定的符號

	雙尾檢定	左尾檢定	右尾檢定
虛無假設 H_0 的符號	=	= 或 \geq	= 或 \leq
對立假設 H_1 的符號	\neq	<	>
拒絕域	在左右兩尾	在左尾	在右尾
α 值	$\alpha/2$	α	α

傳統假設檢定法

○ 臨界值檢定法

在既定顯著水準 α 下，計算出臨界值，決定拒絕域與接受域以決定拒絕或接受虛無假設的方法。

○ 標準檢定統計量法

標準檢定統計量法是將檢定統計量化為標準檢定統計量，再進行檢定。

○ 信賴區間法

若 θ 的 $1-\alpha$ 的信賴區間包含虛無假設 $\theta = \theta_0$ ，則在顯著水準 α 下可接受 H_0 ，若該信賴區間不包含 $\theta = \theta_0$ ，則拒絕 H_0 。

P值法

○ p 值法

左尾檢定的 p 值

$$p \text{ 值} = P(\hat{\theta} \leq \hat{\theta}_0 | \theta = \theta_0)$$

右尾檢定的 p 值

$$p \text{ 值} = P(\hat{\theta} \geq \hat{\theta}_0 | \theta = \theta_0)$$

兩尾檢定的 p 值

$$p \text{ 值} = 2 \times P(\hat{\theta} \geq \hat{\theta}_0 | \theta = \theta_0), \text{ 若 } \hat{\theta}_0 > \theta_0$$

$$p \text{ 值} = 2 \times P(\hat{\theta} \leq \hat{\theta}_0 | \theta = \theta_0), \text{ 若 } \hat{\theta}_0 < \theta_0$$

其中 $\hat{\theta}$ 為 θ 的檢定統計量, $\hat{\theta}_0$ 為 $\hat{\theta}$ 的觀察值, θ_0 為假設值。

○ p 值檢定法的決策法則

- ① 若 $p \text{ 值} \geq \alpha$, 則接受虛無假設 H_0 。
- ② 若 $p \text{ 值} < \alpha$, 則拒絕虛無假設 H_0 。

母體平均數的假設檢定—大樣本

大樣本

$$\left. \begin{array}{l} \text{母體變異數 } \sigma^2 \text{ 已知} \\ \text{母體變異數 } \sigma^2 \text{ 未知} \end{array} \right\} \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} \sim Z$$

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{S_{\bar{X}}} \sim Z$$

母體平均數的假設檢定—大樣本

○ 臨界值檢定法

在既定顯著水準 α 下, 計算出臨界值, 決定拒絕域與接受域以決定拒絕或接受虛無假設的方法。

○ 臨界值法的決策法則

- ① 左尾檢定: 若 $\bar{X} \geq \bar{X}^*$, 則接受虛無假設。
若 $\bar{X} < \bar{X}^*$, 則拒絕虛無假設。臨界值 $\bar{X}^* = \mu_0 - Z_{\alpha} \sigma_{\bar{X}}$ 。
- ② 右尾檢定: 若 $\bar{X} \leq \bar{X}^*$, 則接受虛無假設。
若 $\bar{X} > \bar{X}^*$, 則拒絕虛無假設。臨界值 $\bar{X}^* = \mu_0 + Z_{\alpha} \sigma_{\bar{X}}$ 。
- ③ 兩尾檢定: 若 $\bar{X}_L \leq \bar{X} \leq \bar{X}_U$, 則接受虛無假設。
若 $\bar{X} < \bar{X}_L$ 或 $\bar{X} > \bar{X}_U$, 則拒絕虛無假設。下臨界值 $\bar{X}_L = \mu_0 - Z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{X}}$, 上臨界值 $\bar{X}_U = \mu_0 + Z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{X}}$ 。

母體平均數的假設檢定—大樣本

○ Z 值法的決策法則

- ① 左尾檢定: 若 $Z \geq -Z_{\alpha}$, 則接受虛無假設。
若 $Z < -Z_{\alpha}$, 則拒絕虛無假設。
- ② 右尾檢定: 若 $Z \leq Z_{\alpha}$, 則接受虛無假設。
反之, 若 $Z > Z_{\alpha}$, 則拒絕虛無假設。
- ③ 兩尾檢定: 若 $-Z_{\alpha/2} \leq Z \leq Z_{\alpha/2}$, 則接受虛無假設。
反之, 若 $Z < -Z_{\alpha/2}$ 或 $Z > Z_{\alpha/2}$, 則拒絕虛無假設。

母體平均數的假設檢定—大樣本

○ 信賴區間檢定法

若 $(1 - \alpha)$ 的信賴區間包含虛無假設 $\mu = \mu_0$, 則在顯著水準 α 下, 接受 H_0 , 否則拒絕 H_0 。
信賴區間的求法如下:

- ① 左尾檢定: 求最高限值的信賴區間

$$\mu \leq \bar{X} + Z_{\alpha} \sigma_{\bar{X}}$$

- ② 右尾檢定: 求最低限值的信賴區間

$$\mu \geq \bar{X} - Z_{\alpha} \sigma_{\bar{X}}$$

- ③ 兩尾檢定: 求兩端的信賴區間

$$\bar{X} - Z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{X}} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{X}}$$

式中若 $\sigma_{\bar{X}}$ 未知, 則以 $S_{\bar{X}}$ 代替。

母體平均數的假設檢定—大樣本

○ 左尾檢定的 p 值

$$p \text{ 值} = P(\bar{X} \leq \bar{X}_0 | \mu = \mu_0)$$

○ 右尾檢定的 p 值

$$p \text{ 值} = P(\bar{X} \geq \bar{X}_0 | \mu = \mu_0)$$

○ 雙尾檢定的 p 值

若 $\bar{X}_0 > \mu_0$, 則 $p \text{ 值} = 2 \times P(\bar{X} \geq \bar{X}_0 | \mu = \mu_0)$

若 $\bar{X}_0 < \mu_0$, 則 $p \text{ 值} = 2 \times P(\bar{X} \leq \bar{X}_0 | \mu = \mu_0)$

圖12.18 機器性能的檢定p值法

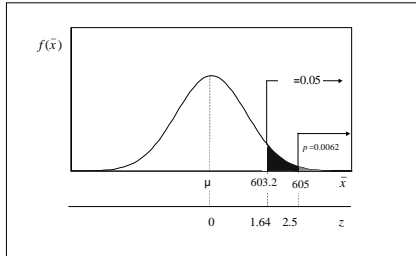


表12.5 母體平均數的檢定--小樣本

小樣本	母體常態	σ^2 已知	$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} \sim Z$
		σ^2 未知	$\frac{\bar{X} - \mu_0}{S_{\bar{X}}} \sim t_{n-1}$
	母體非常態	σ^2 已知	柴比氏定理
		σ^2 未知	無母數統計學

母體平均數的假設檢定-小樣本

○ t 分配在假設檢定時的適用條件

- ①小樣本的情況下($n < 30$)
- ②母體為常態分配
- ③母體標準差 σ 未知

○ t 檢定統計量

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S_{\bar{X}}}$$

式中： μ_0 為猜測值。 \bar{X} 為樣本平均數，樣本平均數的標準差 $S_{\bar{X}} = S/\sqrt{n}$ 。 t 的自由度為 $n-1$ 。

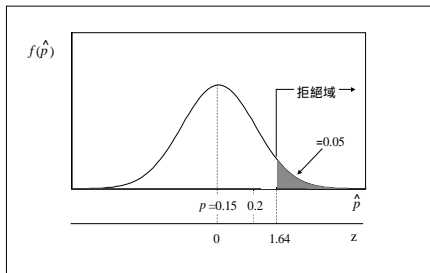
母體比例的假設檢定

○ 檢定統計量

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sigma_{\hat{p}}}$$

式中： p_0 為猜測值， \hat{p} 為樣本比例， $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{p_0 q_0/n}$ 為樣本比例的標準差。

圖12.22 徐立委宣稱的檢定



作業曲線

○ 作業曲線的意義

在對立假設所有可能的母體參數值 μ 下，將犯型二錯誤的機率 β 繪成一條曲線，稱為作業特性曲線(operation characteristic curve)，簡稱為OCC。

圖12.23 型II錯誤的機率

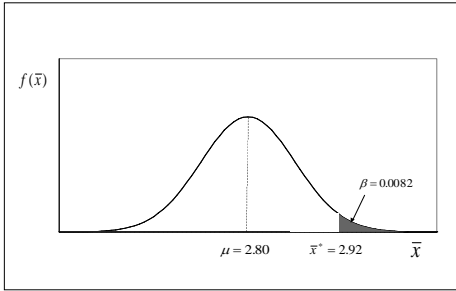
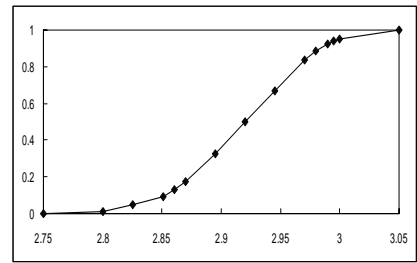


圖10.21 作業特性曲線



檢定力函數

○ 檢定力函數

$$P(\theta) = 1 - \beta(\theta) = P(\text{拒絕 } H_0 \mid H_0 \text{ 為假}) \\ = P(\text{接受 } H_1 \mid H_1 \text{ 為真})$$

圖12.26 檢定力曲線

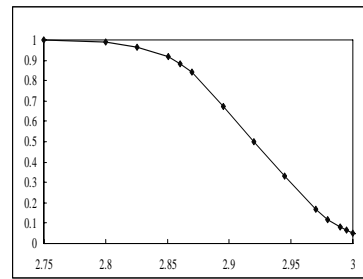


圖12.23 型II錯誤的機率

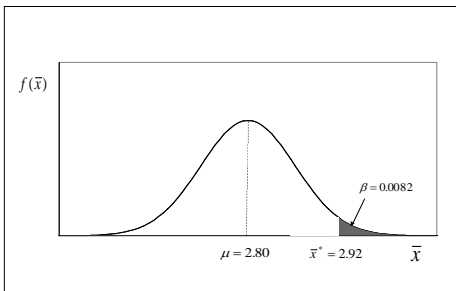
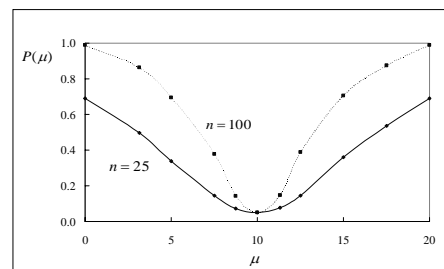


圖12.31 樣本數 n 與檢定力



樣本數的選擇與假設檢定

○ 母體平均數假設檢定的樣本數

① 單尾檢定

$$n = \frac{\sigma^2(Z_\alpha + Z_\beta)^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2}$$

② 雙尾檢定

$$n = \frac{\sigma^2(Z_{\alpha/2} + Z_\beta)^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2}$$

樣本數的選擇與假設檢定

○ 母體比例假設檢定的樣本數

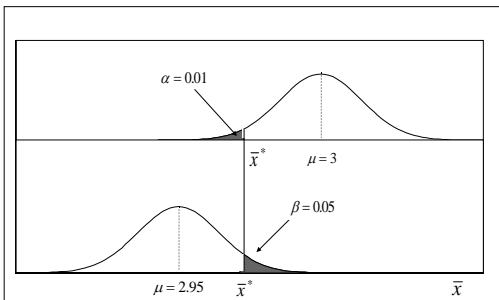
① 單尾檢定

$$n = \frac{(Z_\alpha \sqrt{p_0(1-p_0)} + Z_\beta \sqrt{p_1(1-p_1)})^2}{(p_1 - p_0)^2}$$

② 雙尾檢定

$$n = \frac{[Z_{\alpha/2} \sqrt{p_0(1-p_0)} + Z_\beta \sqrt{p_1(1-p_1)}]^2}{(p_1 - p_0)^2}$$

圖12.35 $\alpha = 0.01$ 與 $\beta = 0.05$



母體變異數的假設檢定

○ 檢定統計量

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

式中： σ_0^2 為母體變異數的猜測值， S^2 為樣本變異數， $n-1$ 為自由度。

母體變異數的假設檢定

○ 母體變異數假設檢定的決策法則

① 左尾檢定

若 $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}$ ，則拒絕 H_0 。若 $\chi^2 \geq \chi^2_{1-\alpha}$ ，則不拒絕 H_0 。

② 右尾檢定

若 $\chi^2 > \chi^2_{\alpha}$ ，則拒絕 H_0 。若 $\chi^2 \leq \chi^2_{\alpha}$ ，則不拒絕 H_0 。

③ 雙尾檢定

若 $\chi^2 > \chi^2_{\alpha/2}$ 或 $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha/2}$ ，則拒絕 H_0 。若 $\chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha/2}$ 或 $\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha/2}$ ，則不拒絕 H_0 。

其中 $n-1$ 為 χ^2 的自由度。

圖12.37 硬碟機庫存量變異的檢定

