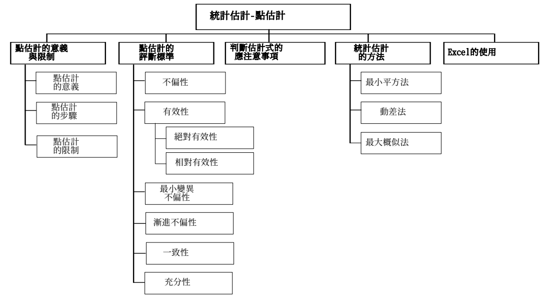
10　統計估計-點估計

學習目的

1.了解點估計的意義、估計的步驟與限制。
2.了解優良估計式的性質。
3.了解判斷估計式的注意事項。
4.了解統計估計的方法。
5.利用 Excel做統計估計。

本章結構



統計估計

❍ **統計估計**

統計估計是利用樣本統計量去推估母體參數的方法。

點估計

❍ **點估計**

由母體抽取一組樣本數為n的隨機樣本，並以由此得到的樣本統計量做為母體參數的估計值。

點估計

❍ **點估計的步驟**

①抽取具代表性的樣本

②選擇一個較佳的樣本統計量做為估計式

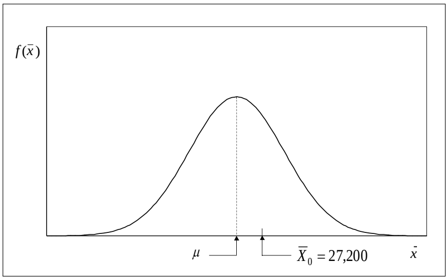
③計算樣本統計量的值

④以樣本統計量的值推論母體參數值並做決策

表10.1　36個大專新畢業生的薪資

23,100	30,400	30,500	35,500	28,000	27,500
23,800	22,300	26,400	26,000	28,500	24,500
31,200	17,200	32,400	25,600	16,700	18,200
35,500	31,400	31,200	24,600	24,500	24,800
31,500	25,900	19,500	36,000	32,200	21,000
31,000	28,000	30,900	31,200	27,200	25,000

圖10.1 大專新畢業生平均薪資的點估計



估計式的評斷標準

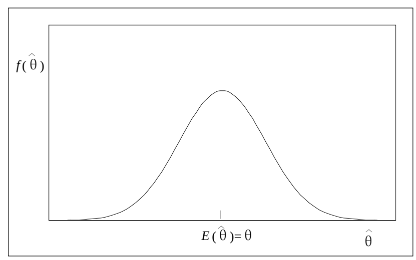
- **不偏性**

  若估計式的抽樣分配的平均數等於母體參數值，則該估計式為不偏估計式，否則為偏誤估計式。即若 $E(\hat{\theta}-\theta)=0$，則 $\hat{\theta}$ 為 θ 的不偏估計式。

表10.4 幾個常用的估計式的不偏性

估計式	不偏性
$\bar{X}$ 估計 μ	不偏
S^2 估計 σ^2 (樣本抽出放回或母體無限)	不偏
S 估計 σ	偏誤
$\hat{p}$ 估計 p	不偏
$\hat{p}\hat{q}$ 估計 pq	偏誤
$\bar{X}_1-\bar{X}_2$ 估計 $\mu_1-\mu_2$	不偏
$\hat{p}_1-\hat{p}_2$ 估計 p_1-p_2	不偏

圖10.2 不偏估計式



估計式的評斷標準

- **絕對有效性**

  設 $\hat{\theta}$ 為 θ 之估計式，若 $\hat{\theta}$ 的平均平方誤差 $MSE(\hat{\theta})=E(\hat{\theta}-\theta)^2$，為所有估計式中最小者，則稱 $\hat{\theta}$ 在估計 θ 時具絕對有效性。

估計式的評斷標準

- **相對有效性**

  設 $\hat{\theta}$、$\hat{\hat{\theta}}$ 均為 θ 的不偏誤估計式，若

  $V(\hat{\theta})/V(\hat{\hat{\theta}})<1$

  則 $\hat{\theta}$ 相對 $\hat{\hat{\theta}}$ 為有效估計式。

圖10.5 估計式的相對有效性

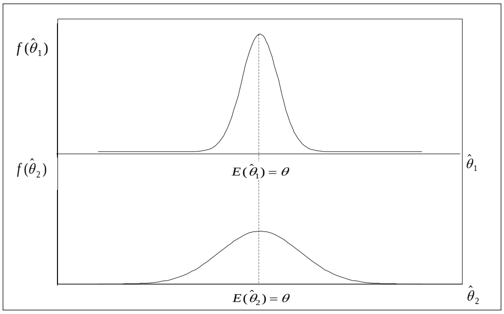


圖10.6 $\bar{X}$ 與m_e的相對有效性

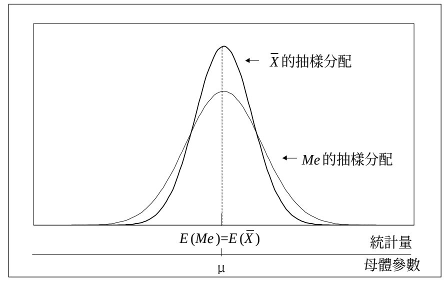
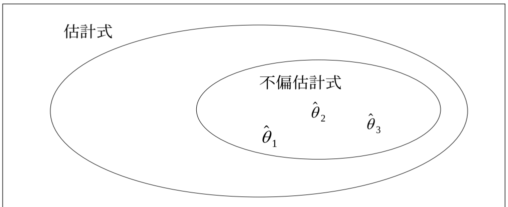


圖10.7 最小變異不偏估計式



$\hat{\theta}_1$: 不偏估計式中變異數最小者。

$V(\hat{\theta}_1)<V(\hat{\theta}_i) \quad i=1,2,3\cdots$

估計式的評斷標準

- **漸近不偏性**

  設$\hat{\theta}_n$為樣本數為n時之θ估計式，若$\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}_n)=\theta$(或$\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}_n)-\theta=0$)，則$\hat{\theta}_n$稱為$\theta$的漸近不偏估計式。

估計式的評斷標準

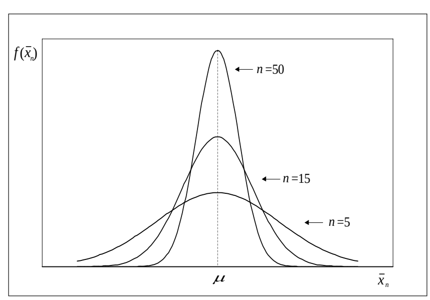
- **一致性估計式(強則)**

  設 $\hat{\theta}_n$ 為樣本數 n 之 θ 估計式，若 $P(\lim_{n\to\infty}\hat{\theta}_n=\theta)=1$，則$\hat{\theta}_n$為$\theta$之一致性估計式。

- **一致性估計式(弱則)**

  設 $\hat{\theta}_n$ 為樣本數 n 之 θ 估計式，若 $\lim_{n\to\infty} P(|\hat{\theta}_n-\theta|<\varepsilon)=1$，則$\hat{\theta}_n$為$\theta$之一致性估計式。其中$\varepsilon$為正的極小數值。

圖10.8 一致性估計式

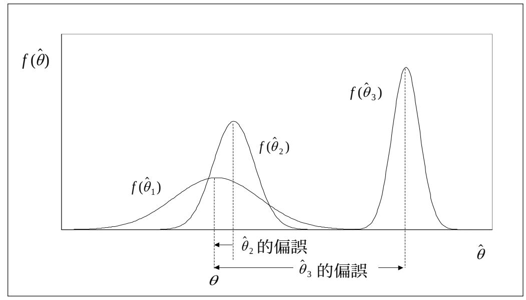


估計式的評斷標準

❍ 充分性

充分性是指若一估計式$\hat{\theta}$在估計θ時充分利用樣本資料的訊息，則稱$\hat{\theta}$為θ的充分估計式。

圖10.9　三個估計式的比較



統計估計的方法-動差法

❍ 母體r級原始動差

$$U_r = E(X^r),\quad r = 1,2,3\cdots$$

❍ 樣本r級原始動差

$$U'_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^r}{n},\quad r = 1,2,3\cdots$$

統計估計的方法-最大概似

❍ 概似函數

設$(X_1,\cdots,X_n)$為從已知母體$f(X;\theta)$簡單隨機抽出之一組隨機樣本，θ代表母體參數，未知；$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$為其觀察值，則概似函數寫為：

$$\begin{aligned} L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta) &= f(x_1;\theta)\,f(x_2;\theta)\ldots.\ f(x_n;\theta) \\ &= \Pi_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) \\ &= L(\theta) \end{aligned}$$

❍ 最大概似法

求使概似函數最大的估計式方法稱為最大概似法，即求$\hat{\theta}$使

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta} = 0 \quad 且 \quad \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta^2} < 0$$