8 連續隨機變數及其常用的機率分配

學習目的

1. 熟悉並計算連續機率分配機率函數的期望值與變異數。
2. 瞭解常態分配的意義、特質與重要性。
3. 瞭解標準常態分配的意義、性質與利用標準常態分配求算機率。
4. 瞭解均等分配、指數分配的意義及性質並計算其期望值與變異數。
5. 比較超幾何分配、二項分配、泊松分配與常態分配。
6. 利用Excel求算各個連續機率分配並繪製圖形。

本章結構

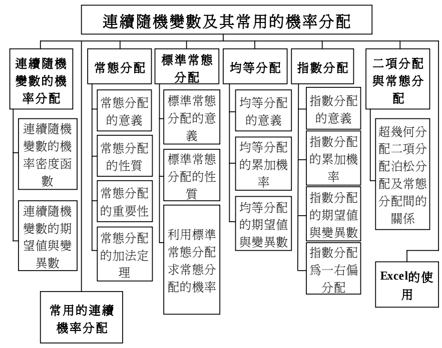
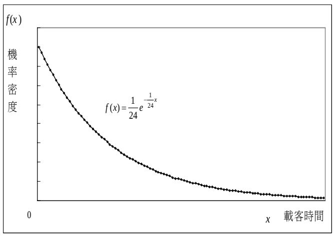
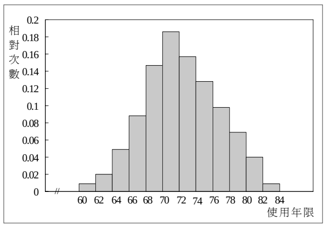


圖8.1 平均間隔時間24分鐘的指數分配



連續隨機變數的機率分配

圖8.2 相對次數直方圖（單位組距）



連續隨機變數的機率分配

圖8.3 相對次數直方圖

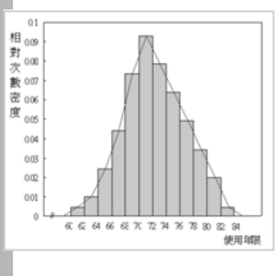
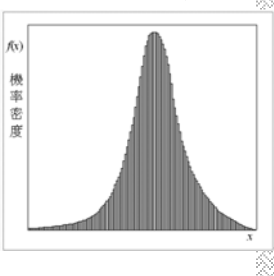


圖8.4 機率曲線



連續隨機變數的機率分配

- **連續隨機變數的機率分配**

  單一連續隨機變數的機率分配是表示，連續隨機變數的任意兩點之間變量的發生機率（或相對次數）的分布情形。

連續隨機變數的機率分配

- **連續隨機變數的機率密度函數**

  設X為連續隨機變數，其值為 $a \le X \le b$ ，若 $f(x)$ 滿足下列二條件：

  ① $f(x) \ge 0$　② $\int_a^b f(x)dx = 1$

  則 $f(x)$ 為X的機率密度函數(probability density function)，簡稱*pdf*。

連續隨機變數的機率分配

- **累加機率函數**

  $F(X = x) = P(X \le x) = \int_a^x f(x)dx$

- **期望值**

  $E(X) = \int_a^b xf(x)dx = \mu \qquad (a \le X \le b)$

- **變異數**

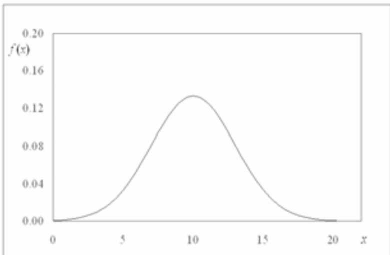
  $V(X) = \sigma_X^2 = \int_a^b (x-\mu)^2 \cdot f(x)dx$

- **標準差**

  $\sigma = \sqrt{V(X)}$

常態分配

圖8.5　常態分配



上圖為平均數 μ ＝10，標準差為 σ ＝3的常態分配。

常態分配

表8.1　大四計量經濟學學期成績的分配

x 計量經濟學學期成績	$P(x)$
0~20	0.0299
20~40	0.2332
40~60	0.4714
60~80	0.2332
80~100	0.0299

常態分配

- **常態分配的定義**

  設X為連續隨機變數，若其機率密度函數為：

  $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty < x < \infty$$

  式中：　$-\infty < \mu < \infty$,$\sigma > 0$ ，$\pi = 3.1416$ ，$e = 2.7183$ 。

  則稱此 $f(x)$ 為常態分配。

常態分配

圖8.6　平均數相同標準差不同

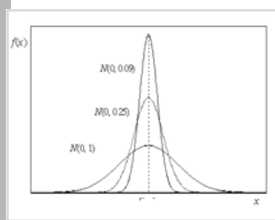
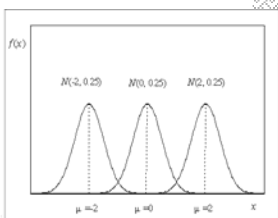
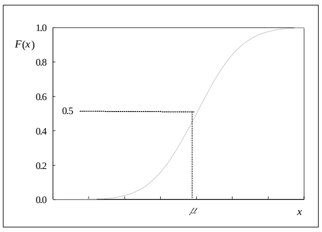


圖8.7　平均數不同標準差相同



常態分配

圖8.8 常態分配的累加機率圖



常態分配

❍ **常態分配的特質**

① 常態分配 $f(x)$ 爲以 μ 爲中心的對稱分配。

② 常態分配曲線下面的面積總和等於1。

③ 常態分配 $f(x)$ 在 $X=\mu\pm\sigma$ 時有一轉折點。

④ 常態分配曲線的兩尾無限延伸。

⑤ 常態分配的機率範圍可分爲三種情況。

常態分配

❍ **常態分配的平均數**

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\mu$$

❍ **變異數**

$$V(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\sigma^2$$

常態分配

圖8.9 常態分配的對稱性

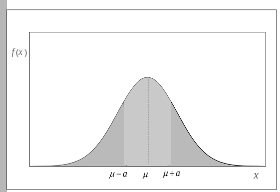
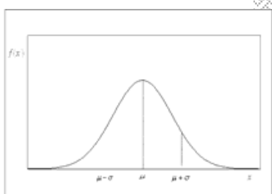


圖8.10 常態分配的轉折點



常態分配

❍ **常態分配的機率範圍**

① 常態隨機變數的值落在離開平均數1個標準差等距的範圍(即 $\mu\pm\sigma$)之機率爲：

$$P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=0.6826$$

② 常態隨機變數的值落在離開平均數2個標準差等距的範圍(即 $\mu\pm2\sigma$)之機率爲：

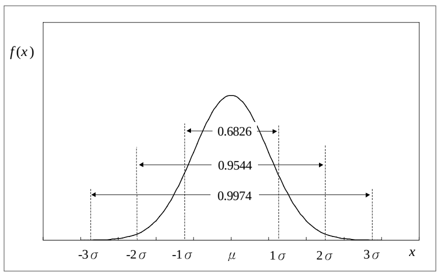
$$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)=0.9544$$

③ 常態隨機變數的值落在離開平均數3個標準差等距的範圍(即 $\mu\pm3\sigma$)之機率爲：

$$P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma)=0.9974$$

常態分配

圖8.11 常態分配的機率範圍



常態分配

❍ **常態分配的重要性**

①常態分配可做爲在統計推論程序中的基本模式

②常態分配可進行許多統計推論

③常態分配構成大樣本推論統計的基礎

④間斷機率分配在某些條件下可利用常態分配求其近似值

常態分配

❍ **常態分配的加法定理**

定理1 設 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，若 $W = a + bX$ 則

$$W \sim N(a + b\mu, b^2\sigma^2)$$

定理2 設 $X \sim N(\mu_X,\sigma_X^2)$，$Y \sim N(\mu_Y,\sigma_Y^2)$ 且 X、Y 獨立，若

$$W = aX + bY$$

則

$$W \sim N(a\mu_X + b\mu_Y, a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2)$$

標準常態分配

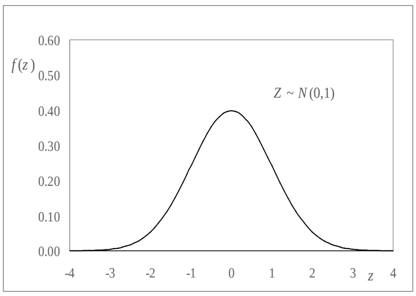
❍ **標準常態分配**

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Z^2}{2}}$$

式中 $Z = (X - \mu)/\sigma$ 標準常態變數。標準常態分配其平均數爲 0，變異數爲1。一般以 $Z \sim N(0,1)$ 來表示。

標準常態分配

圖8.12　標準常態曲線



標準常態分配

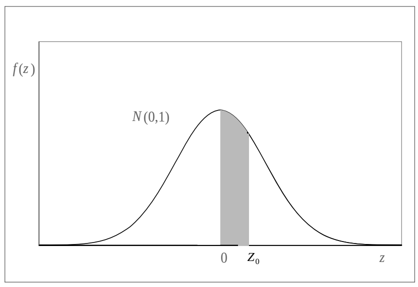
❍**標準常態分配的性**

①標準常態分配具有常態分配的特質，唯其平均數 $\mu_Z = 0$，變異數 $\sigma_Z^2 = 1$，標準差 $\sigma_Z = 1$，它是常態分配的特殊例子。

②標準常態分配的任何值域的機率可查標準常態機率值表而獲得。標準常態分配機率值表中的機率值代表 $P(0 < Z < z_0)$，它表示標準常態變數 $Z = 0$ 與任何已知正的 Z 值 z_0 間的機率。

標準常態分配

圖8.13　標準常態分配機率(0與z_0間)



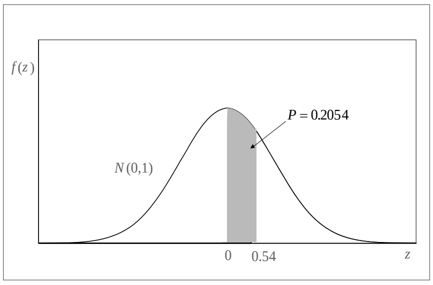
標準常態分配

表8.2 標準常態機率分配表

	Z 的第二位小數									
z	**.00**	**.01**	**.02**	**.03**	**.04**	**.05**	**.06**	**.07**	**.08**	**.09**
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633

標準常態分配

圖8.14 Z在0與0.54間的機率值

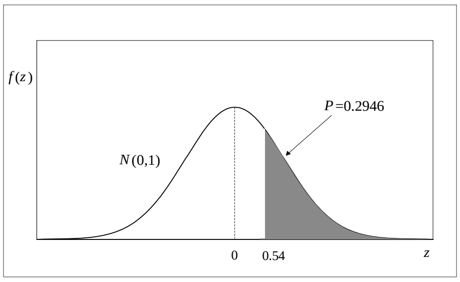


標準常態分配

圖8.15 標準常態機率對話方塊

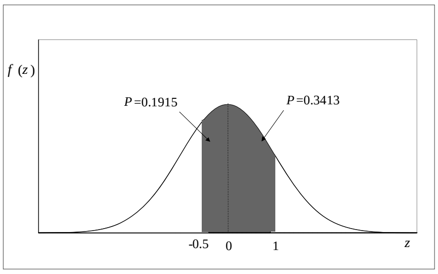
標準常態分配

圖8.16 Z > 0.54的標準常態機率值



標準常態分配

圖8.17 -0.5 < Z < 1的標準常態機率值



標準常態分配

圖8.18 Z > -0.35的標準常態機率值

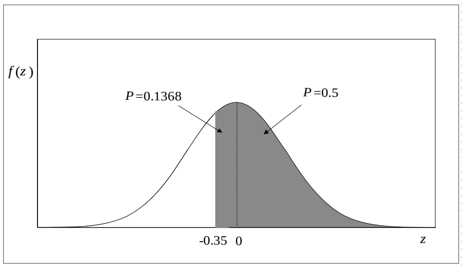


圖8.19　$Z < -0.35$的標準常態機率值

標準常態分配

圖8.20　$Z > z$的標準常態機率值

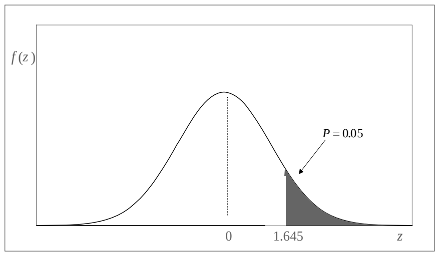
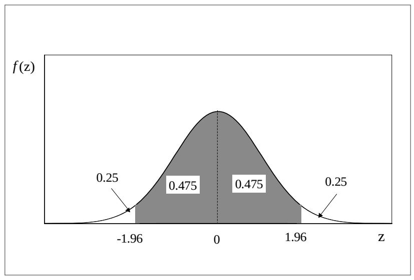


圖8.21 標準常態值對話方塊

標準常態分配

圖8.22　$-z_0 < Z < z_0$的標準常態機率值



標準常態分配

❍利用常態分配求常態分配的機率

①將隨機變數X化爲標準隨機變數Z 。同時將 a 值與 b 值標準化：

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}\text{ ， }a' = \frac{a-\mu}{\sigma}\text{ ， }b' = \frac{b-\mu}{\sigma}$$

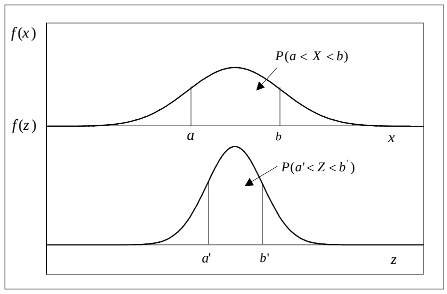
②其次，將Z ，a' ，b' 代入$P(a < X < b)$ ，即

$$P(a < X < b) = P(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma})$$
$$= P(a' < Z < b')$$

③依照查標準常態分配機率值表的方法查表，即可求得機率值。

標準常態分配

圖8.23　常態分配與標準常態分配



標準常態分配

圖8.24 260< *X* <390的機率

標準常態分配

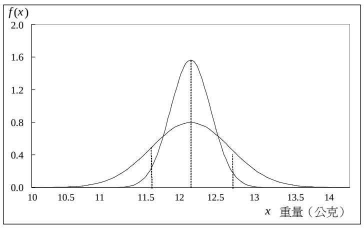
圖8.25 常態分配機率值對話方塊

標準常態分配

圖8.26 常態分配機率值對話方塊

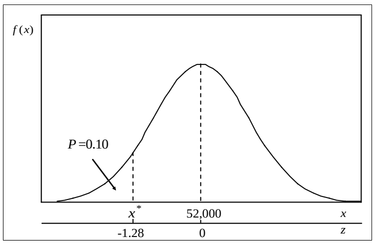
標準常態分配

圖8.27 咖啡的常態分配



標準常態分配

圖8.28 輪胎保證行駛里程的標準常態分配



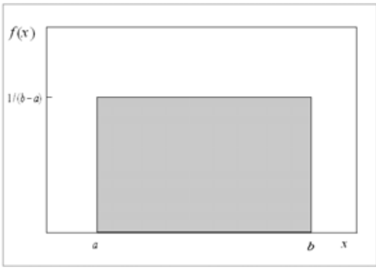
均等分配

- **機率密度函數**

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \qquad a \le X \le b$$
$$= 0 \qquad \text{其他}$$

均等分配

圖8.29 均等分配



均等分配

- **累加機率函數**

  $F(x) = P(X \le x) = \dfrac{x-a}{b-a}$

- **期望值**

  $E(X) = \dfrac{b+a}{2}$

- **變異數**

  $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

指數分配

- **指數分配**

  若X爲連續的隨機變數，其機率密度函數爲：

  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x \ge 0, \lambda > 0$

  則 $f(x)$ 爲指數分配。式中：λ 爲單位時間事件發生的平均數。

- **期望值**

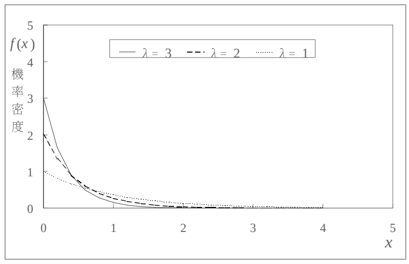
  $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$

- **變異數**

  $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

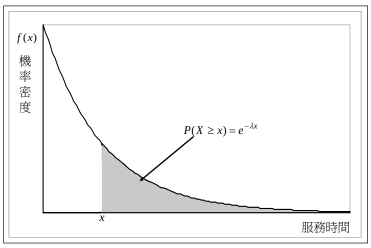
指數分配

圖8.30 指數分配



指數分配

圖8.31 $P(X \ge x)$的機率



指數分配

- **期望值**

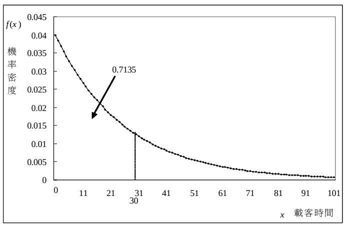
  $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$

- **變異數**

  $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

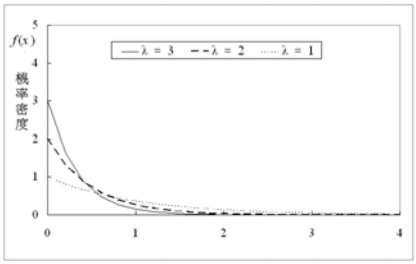
指數分配

圖8.32 計程車的載客時間



指數分配

圖8.33 不同 λ 值的指數分配



二項分配與常態分配

表8.3 二項分配與常態分配

	A	B	C
1	x	二項分配	常態分配
2	0	0.000244	0.000571
3	1	0.002930	0.003571
4	2	0.016113	0.016004
5	3	0.053711	0.051393
6	4	0.120850	0.118255
7	5	0.193359	0.194970
8	6	0.225586	0.230329
9	7	0.193359	0.194970
10	8	0.120850	0.118255
11	9	0.053711	0.051393
12	10	0.016113	0.016004
13	11	0.002930	0.003571
14	12	0.000244	0.000571

二項分配與常態分配

圖8.34 二項機率分配

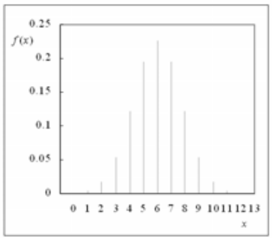
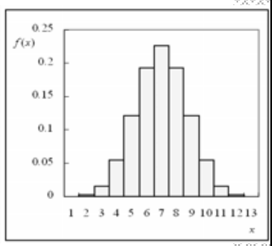
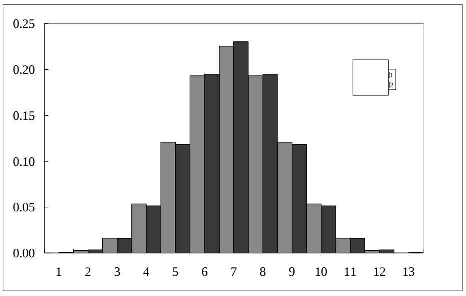


圖8.35 二項機率分配直方圖



二項分配與常態分配

圖8.36 二項分配與常態分配



二項分配與常態分配

圖8.37 不連續的機率分配

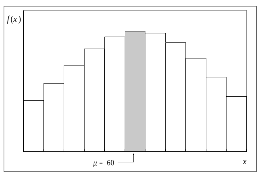
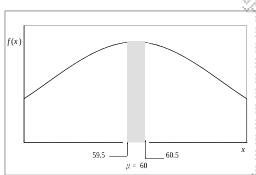
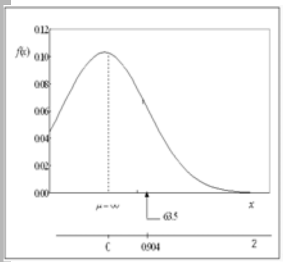


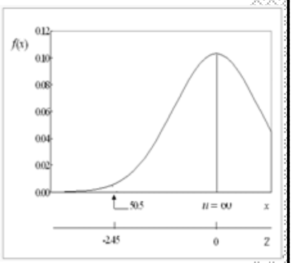
圖8.38 不連續的機率分配



二項分配與常態分配

圖8.39 至少64間房間租出去的機率　　圖8.40 至多租出50間房間的機率





連續隨機變數的機率分配

圖8.41　幾個分配間的關係