

## 7 間斷隨機變數及其常用的機率分配

### 學習目的

1. 定義或瞭解隨機變數的意義及其機率分配。
2. 區分間斷隨機變數與連續隨機變數。
3. 計算間斷隨機變數的期望值、變異數及標準差。
4. 熟悉二項分配意義與特性，及其在日常生活上的應用。
5. 了解泊松分配的意義與特性，及其在日常生活上的應用。
6. 了解超幾何分配的意義與特性，及其在日常生活上的應用。
7. 比較泊松分配與二項分配。
8. 利用Excel求算各個分配並繪製圖形。

### 本章結構

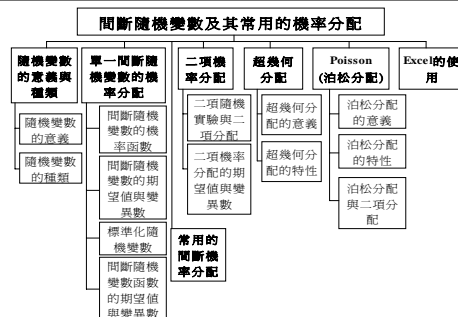


表7.1 5分鐘內顧客到達ATM的機率

$x$	機率
0	0.26
1	0.32
2	0.20
3	0.14
4	0.05
5	0.02
6以上	0.01

### 隨機變數的意義與種類

#### ○ 隨機變數的意義

隨機變數是隨機實驗中對應樣本點的實數值函數。

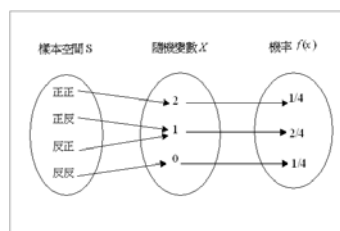
### 隨機變數的意義與種類

表7.2 投擲銅板的隨機實驗

樣本點 $\omega$	正面的個數 ( $x$ )	相對次數 (機率)
(反·反) $\omega$	0	$1/4 = 0.25$
(正·反) (反·正) $\omega$	1	$2/4 = 0.50$
(正·正) $\omega$	2	$1/4 = 0.25$
$N = 4$	$\omega$	1.00

### 隨機變數的意義與種類

圖7.1 隨機變數



隨機變數的意義與種類

表7.3 台灣人到中國大陸的次數

赴中國大陸次數 $X$	相對次數 (%)
0	10.2
1	35.8
2	33.5
3 及以上	20.5

林惠玲 陳正倉著 雙葉書庫發行 2009

隨機變數的意義與種類

○ 隨機變數的種類

間斷隨機變數

隨機變數的變量其個數是有限的，或個數是無限但可數的稱為間斷或不連續隨機變數。

連續隨機變數

隨機變數的變量其個數為無限且不可數的稱為連續隨機變數。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書庫發行 2009

隨機變數的意義與種類

表7.4 間斷隨機變數

隨機實驗	隨機變數	隨機變數 $X$ 可能的值
1 枚銅板擲 2 次	出現正面的次數	0, 1, 2
抽取 10 個蘋果檢查品質	不良品的個數	0, 1, 2, ..., 10
購買電腦顧客的性別	性別	0 為男性, 1 為女性
出售的皮包數	銷售量	0, 1, 2, ...
公車 263 路線 1 天的顧客	乘客人數	0, 1, 2, ...

林惠玲 陳正倉著 雙葉書庫發行 2009

隨機變數的意義與種類

表7.5 連續隨機變數

隨機實驗	隨機變數	隨機變數 $X$ 可能的值
詢問陳先生的月薪	薪資收入	$x \geq 0$
觀察醫院病人候診時間	等候時間	$x \geq 0$
抽取 1 家電腦廠的年生產量	產量	$x \geq 0$
抽取 1,250ml 瓶裝汽水	汽水容量 ml	$0 \leq x \leq 1,250$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書庫發行 2009

單一間斷隨機變數的機率分配

○ 間斷隨機變數的機率分配

單一間斷隨機變數的機率分配是表示，間斷隨機變數的各個變量的發生機率(或相對次數)的分布情形。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書庫發行 2009

單一間斷隨機變數的機率分配

表7.6 交通事故的次數分配

	A	B
1	每天交通事件數	相對次數
2	0	0.37
3	1	0.31
4	2	0.18
5	3	0.09
6	4	0.04
7	5	0.01
8	合計	1

林惠玲 陳正倉著 雙葉書庫發行 2009

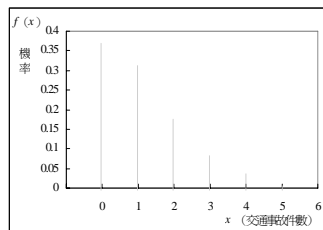
單一間斷隨機變數的機率分配

表7.7 交通事故的機率分配

	A	B	C
1	隨機變量 $x$	相對次數	機率函數 $f(x)$
2	0	0.37	0.37
3	1	0.31	0.31
4	2	0.18	0.18
5	3	0.09	0.09
6	4	0.04	0.04
7	5	0.01	0.01
8	合計	$\Sigma=1.00$	$\Sigma f(x)=1.00$

單一間斷隨機變數的機率分配

圖7.2 交通事故的機率分配



單一間斷隨機變數的機率分配

○ 間斷隨機變數的機率函數

設間斷隨機變數 $X$ ，其變量為 $x_1, \dots, x_n$ ，對應 $X$ 的每一數值有唯一機率與之對應，該機率值表為 $f(X=x_i)$ 或 $f(x_i)$ ，並滿足下列兩個條件：

- ①  $0 \leq f(x_i) \leq 1$
- ②  $\sum_{i=1}^n f(x_i) = 1$

則 $f(x)$ 為 $X$ 之機率函數或稱機率分配。

單一間斷隨機變數的機率分配

○ 累加機率函數

$$F(X=x_i) = F(x_i) = P(X \leq x_i) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_i)$$

單一間斷隨機變數的機率分配

○ 累加機率函數 $F(x)$ 的特性

- ①  $F(x_0) = 0 \quad x_0 < x_1$
- ②  $F(x_n) = 1$
- ③ 如果  $x_j \geq x_i$ ，則  $F(x_j) \geq F(x_i)$ 。
- ④  $f(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$ ， $x_{i-1}$  為 $x_i$ 的前一個變量， $x_{i-1} < x_i$ 。

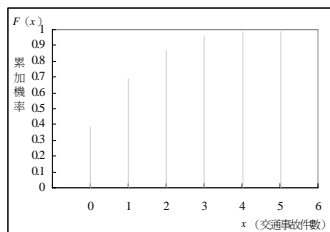
單一間斷隨機變數的機率分配

表7.8 交通事故的以下累加機率分配表

	A	B	C
1	隨機變量 $x$	機率函數 $f(x)$	累加機率函數 $F(x)$
2	0	0.37	0.37
3	1	0.31	0.68
4	2	0.18	0.86
5	3	0.09	0.95
6	4	0.04	0.99
7	5	0.01	1
8	合計	$\Sigma=1.00$	

單一間斷隨機變數的機率分配

圖7.3 交通事故的累加機率圖



林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

單一間斷隨機變數的機率分配

○ 期望值

期望值是指，如果我們不斷的進行多次的實驗，預期會發生或觀察得到的數值或結果。

○ 間斷隨機變數的期望值

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i) = \mu$$

式中：X 為間斷隨機變數，f(x<sub>i</sub>) 為機率函數。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

單一間斷隨機變數的機率分配

表7.9 交通事故的機率分配

	A	B	C
1	隨機變量 X	機率函數 f(x)	x <sup>2</sup> f(x)
2	0	0.37	0
3	1	0.31	0.31
4	2	0.18	0.36
5	3	0.09	0.27
6	4	0.04	0.16
7	5	0.01	0.05
8	合計	Σ = 1.00	Σ x <sup>2</sup> f(x) = 1.15

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

單一間斷隨機變數的機率分配

○ 間斷隨機變數的變異數

$$V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 f(x_i)$$

或

$$V(X) = E[(X - \mu)^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$$

○ 間斷隨機變數的標準差

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 f(x_i)}$$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

單一間斷隨機變數的機率分配

表7.10 交通事故次數的變異數

	A	B	C	D	E
1	x	f(x)	xf(x)	x <sup>2</sup>	x <sup>2</sup> f(x)
2	0	0.37	0	0	0
3	1	0.31	0.31	1	0.31
4	2	0.18	0.36	4	0.72
5	3	0.09	0.27	9	0.81
6	4	0.04	0.16	16	0.64
7	5	0.01	0.05	25	0.25
8	合計	Σ = 1.00	Σ xf(x) = 1.15		Σ x <sup>2</sup> f(x) = 2.73

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

單一間斷隨機變數的機率分配

○ 標準化變數(Z變數)

設X為一隨機變數，其平均數為μ，變異數為σ<sup>2</sup>，令

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

則Z為一標準化變數。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

表7.11 樂透彩的期望值

項	A	B	C	D	E	F
1	中獎機率		預期中獎注數	獎金	每注獎金	每注期望值
2	頭獎	3.622E-07	2,8976	53522747	18471406	6.69034334
3	貳獎	2.1734E-06	17,3872	16468537	947164.4	2.05856718
4	參獎	7.60682E-05	608,5456	20585672	33827.66	2.57320898
5	肆獎	0.003423068	27384,5472	46660856	1703,912	5.83260701
6	伍獎	0.051726368	413810.94	82762188	200	10.3452735
7	合計			220000000		27.5

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

單一間斷隨機變數的機率分配

表7.12 標準化隨機變數

隨機變數X	標準化隨機變數 $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 1.15}{1.19}$
0	-0.966
1	-0.126
2	0.714
3	1.555
4	2.395
5	3.235

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

單一間斷隨機變數的機率分配

圖7.4 標準化對話方塊



林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

單一間斷隨機變數函數的期望值與變異數

○隨機變數函數的期望值

設  $X$  為間斷隨機變數，其機率函數為  $f(x)$ 。令  $h(X)$  為  $X$  的函數，則  $h(X)$  的期望值表為  $E[h(X)]$  或  $\mu_{h(X)}$ ：

$$E[h(X)] = \sum_x h(x)f(x)$$

○隨機變數函數期望值的定理

設  $C$  為常數， $h(X)$  為  $X$  的函數，則

- ⊙  $E(C) = C$
- ⊙  $E[C \cdot h(X)] = C \cdot E[h(X)]$
- ⊙  $E[h_1(X) + h_2(X) + \dots + h_n(X)] = E[h_1(X)] + \dots + E[h_n(X)]$

式中： $h_1(X), h_2(X), \dots, h_n(X)$  均為  $X$  的函數。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

單一間斷隨機變數函數的期望值與變異數

○隨機變數函數的變異數

設  $X$  為間斷隨機變數，其機率函數為  $f(x)$ ，令  $h(X)$  為  $X$  的函數，則  $h(X)$  的變異數為：

$$\sigma_{h(X)}^2 = V[h(X)] = E[h(X) - E[h(X)]]^2$$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

單一間斷隨機變數函數的期望值與變異數

○線性函數的期望值

設  $Y = a + bX$ ，則  $Y$  的期望值(平均數)為：

$$E(Y) = E(a + bX) = a + bE(X)$$

○線性函數的變異數

設  $Y = a + bX$ ，則  $Y$  的變異數為：

$$V(Y) = V(a + bX) = V(bX) = b^2V(X)$$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

二項機率分配

○ 二項隨機實驗

隨機實驗都包含  $n$  個獨立相同的試行 (trial)，每次試行只有兩種可能結果，不是成功，就是失敗。每次試行結果出現的機率都相同，此種實驗我們稱為二項隨機實驗 (binomial random experiment)。

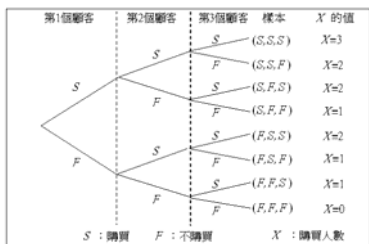
二項機率分配

○ 二項隨機實驗的特性：

- ① 實驗中包含  $n$  次相同的試行
- ② 每一次試行只有二種互斥的可能結果，不是成功 (表示為  $S$ )，就是失敗 (表示為  $F$ )。
- ③ 成功的機率為  $P(S) = p$ ，失敗的機率為  $P(F) = 1 - p$  (或表為  $q$ )，且每次試行的機率均相同。
- ④ 每一次試行是獨立的
- ⑤ 隨機變數定義為  $n$  次試行中成功的次數

二項機率分配

圖7.5 二項隨機實驗的樹枝



二項機率分配

表7.13 推銷3個顧客2個會購買的機率

2 個顧客購買	機率
SSF	$p^2q = (0.2)^2(0.8) = 0.032$
SFS	$pqp = (0.2)^2(0.8) = 0.032$
FSS	$qpq = (0.2)^2(0.8) = 0.032$

二項機率分配

○ 意義

設  $X$  為一 間斷隨機變數，若  $f(x)$  為：

$$f(x) = C_n^x p^x q^{n-x} \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

則  $f(x)$  為一 二項機率分配。式中： $C_n^x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$ ， $n$ ：試行次數， $x$ ：成功的次數， $p$ ：成功的機率， $q$ ：失敗的機率  $= 1 - p$

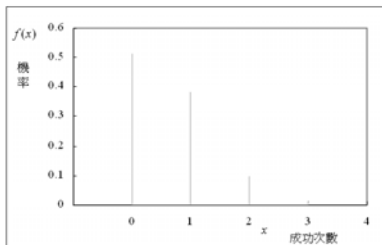
二項機率分配

表7.14 二項分配機率值

	A	B
1	$x$	$f(x)$
2	0	0.512
3	1	0.384
4	2	0.096
5	3	0.008

二項機率分配

圖7.6 二項分配機率分配圖



林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

二項機率分配

圖7.7 二項分配對話方塊



林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

二項機率分配

- 期望值  
 $E(X) = np$
- 變異數  
 $V(X) = npq$
- 標準差  
 $\sigma = \sqrt{npq}$

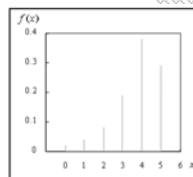
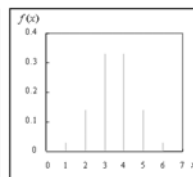
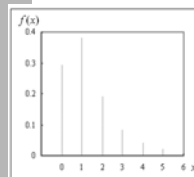
林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

二項機率分配

圖7.8 右偏分配

圖7.9 對稱分配

圖7.10 左偏分配



林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

超幾何分配

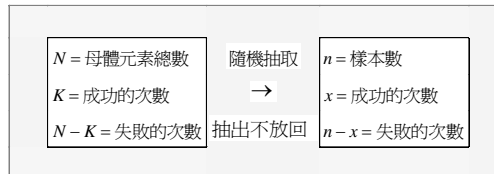
- 超幾何分配

$$f(x) = \frac{C_x^K C_{n-x}^{N-K}}{C_n^N} \quad x = 0, 1, \dots, n \quad x \leq K \quad x \geq K + n - N$$

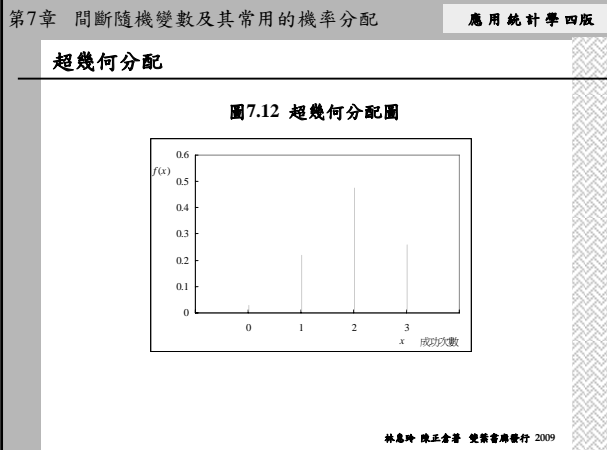
林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

超幾何分配

圖7.11 超幾何實驗



林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009



第7章 間斷隨機變數及其常用的機率分配 應用統計學 四版

### 超幾何分配

- 平均數
 
$$E(X) = n \cdot \frac{K}{N}$$
- 變異數
 
$$V(X) = n \cdot \frac{K}{N} \cdot \frac{N-K}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

第7章 間斷隨機變數及其常用的機率分配 應用統計學 四版

### Poisson(泊松)分配

- 泊松分配
 

設已知在一定的區間發生事件A的期望值為 $\lambda$ ，令X為該區間發生事件的次數，則：

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

此即為泊松分配，其參數為 $\lambda$ 。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

第7章 間斷隨機變數及其常用的機率分配 應用統計學 四版

### Poisson(泊松)分配

表7.15  $\lambda=4$  及  $\lambda=8$  的泊松機率分配

1	2	f(x)	
		$\lambda=4$	$\lambda=8$
3	0	0.018315639	0.000335463
4	1	0.073262556	0.002683701
5	2	0.146525111	0.010734804
6	3	0.195366815	0.028626144
7	4	0.195366815	0.057252288
8	5	0.156293452	0.091603662
9	6	0.104195635	0.122138215
10	7	0.059540363	0.139586532
11	8	0.029770181	0.139586532
12	9	0.013231192	0.124076917
13	10	0.005292477	0.099261534
14	11	0.001924537	0.072190206
15	12	0.000641512	0.048126804
16	13	0.000197388	0.029616495
17	14	5.63967E-05	0.016923711

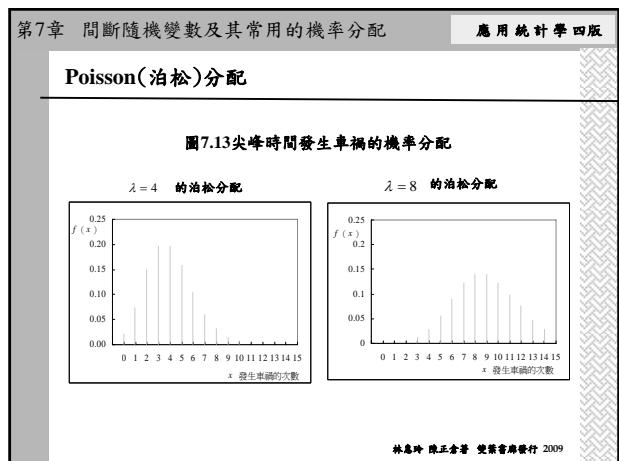
林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

第7章 間斷隨機變數及其常用的機率分配 應用統計學 四版

### Poisson(泊松)分配

- 期望值
 
$$E(X) = \lambda$$
- 變異數
 
$$V(X) = \lambda$$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009





泊松分配與二項分配

表7.16 二項分配與泊松分配

	A	B	C	D
1	x	二項分配	泊松分配	B-C
2	0	2.65614E-05	4.53999E-05	-1.88385E-05
3	1	0.000295127	0.000453999	-0.000158873
4	2	0.001623197	0.002269996	-0.0006468
5	3	0.005891602	0.007566655	-0.001675052
6	4	0.015874596	0.018916637	-0.003042042
7	5	0.033864804	0.037833275	-0.003967471
8	6	0.059578729	0.063054458	-0.003476729
9	7	0.088895246	0.090079226	-0.001183979
10	8	0.114823027	0.112599032	0.002223994
11	9	0.130416277	0.125110036	0.005306241
12	10	0.131865347	0.125110036	0.006755311

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

泊松分配與二項分配

圖7.14 二項分配

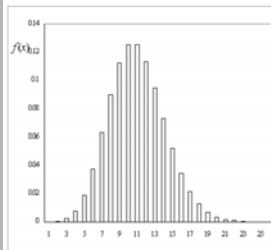
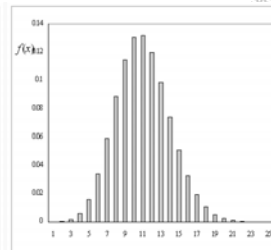


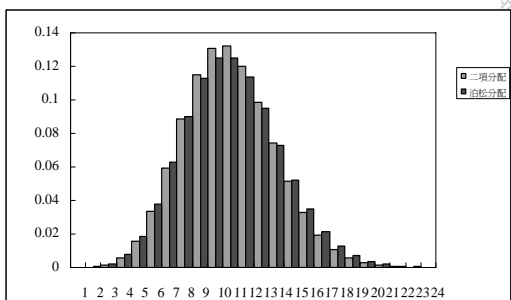
圖7.15 泊松分配圖



林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

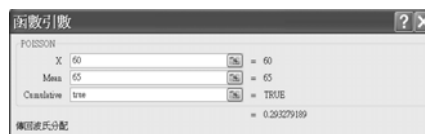
泊松分配與二項分配

圖7.16 二項分配與泊松分配



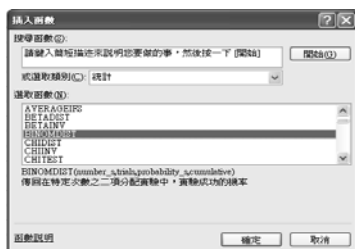
林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

圖7.17 泊松分配對話方塊圖



林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

圖7.18 插入函數對話方塊圖



林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009