

第6章 機率論 應用統計學 四版

6 機率論

學習目的

1. 定義機率。
2. 了解機率的基本觀念如隨機實驗，實驗結果，事件，樣本空間等。
3. 描述古典的機率理論、客觀的機率理論及主觀的機率理論。
4. 熟習聯合機率、邊際機率及條件機率的定義及其應用。
5. 學習獨立、不獨立與互斥事件間的相互關係。
6. 認識貝氏定理及應用貝氏定理。

林島玲 陳正倉著 雙葉書庫發行 2009

第6章 機率論 應用統計學 四版

本章結構

林島玲 陳正倉著 雙葉書庫發行 2009

第6章 機率論 應用統計學 四版

機率論

圖6.1 2008年3月4日至5月9日大樂透開獎結果統計

林島玲 陳正倉著 雙葉書庫發行 2009

第6章 機率論 應用統計學 四版

隨機實驗

○ 隨機實驗的意義

隨機實驗是一種過程(process)，是一種不能確定預知會發生何種結果的實驗方式。在實驗前已知所有可能出現的結果，而實驗後的結果為所有可能的結果之一，但實驗前並未能正確的、肯定的預知它是何種結果。隨機實驗可重複進行，而經過長期重複實驗，出現的結果會遵循某一些統計規則（成現有規則的分布）。

林島玲 陳正倉著 雙葉書庫發行 2009

第6章 機率論 應用統計學 四版

隨機實驗

表6.1 隨機實驗、出象與樣本空間

隨機實驗	出象	樣本空間
抽取一個產品做檢驗	良品，不良品	$S = \{\text{良品, 不良品}\}$
丟一個骰子1次	1,2,3,4,5,6	$S = \{1,2,3,4,5,6\}$
抽查經濟學成績	0~100分	$S = \{0 \sim 100\text{分}\}$
衡量初生嬰兒的體重	1,500g~5,000g	$S = \{1,500\text{g} \sim 5,000\text{g}\}$

林島玲 陳正倉著 雙葉書庫發行 2009

第6章 機率論 應用統計學 四版

隨機實驗

○ 隨機

隨機是指一個現象事先無法預知是否發生，但在長期多次重複實驗之後，該現象的發生會出現有規則的型態。

林島玲 陳正倉著 雙葉書庫發行 2009

第6章 機率論 應用統計學 四版

隨機實驗

- **基本出象**
隨機實驗的每個可能的結果稱為基本出象，又稱為樣本點。
- **樣本空間**
一個隨機實驗中，所有可能出象的集合稱為樣本空間。通常以英文大寫字母S表示之。

林島坤 陳正金著 雙葉書廊發行 2009

第6章 機率論 應用統計學 四版

隨機實驗

圖 6.2 擲一個銅板兩次的樣本空間

Venn 圖 樹枝圖

林島坤 陳正金著 雙葉書廊發行 2009

第6章 機率論 應用統計學 四版

隨機實驗

- **事件**
樣本空間的部份集合稱為事件。
- **簡單事件**
事件只包含一個基本出象者稱為簡單事件。
- **複合事件**
事件包含二個或二個以上基本出象者稱為複合事件。

林島坤 陳正金著 雙葉書廊發行 2009

第6章 機率論 應用統計學 四版

隨機實驗

圖 6.3 簡單事件與複合事件

林島坤 陳正金著 雙葉書廊發行 2009

第6章 機率論 應用統計學 四版

隨機實驗

- **乘數定理**
設一隨機實驗包含 k 個實驗 E_1, E_2, \dots, E_k ，若每一實驗 E_i 有 n_i 種結果， $i=1, 2, \dots, k$ ，則該隨機實驗有 $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$ 種可能結果。
- **排列**
$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} = n \times (n-1) \times \dots \times (n-r+1)$$
- **組合**
$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-r+1)}{r!}$$

林島坤 陳正金著 雙葉書廊發行 2009

第6章 機率論 應用統計學 四版

機率理論

- **古典的機率理論**
$$P(E) = \frac{1}{N}$$
- **客觀的機率理論**
$$P(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(E)}{n}$$

式中： $n(E)$ 表示事件E出現的次數， n 表隨機實驗的總次數。
- **主觀的機率理論**
$$P(E) = [\text{對事件E發生的信心}]$$

林島坤 陳正金著 雙葉書廊發行 2009

第6章 機率論 應用統計學 四版

機率理論

圖6.4 投擲銅板出現正面的機率

林島峰 陳正倉著 雙葉書房發行 2009

第6章 機率論 應用統計學 四版

機率理論

○ **大數法則**

若某事件有既定的機率，而我們不斷的進行相同的實驗，則該事件發生的次數比例會越來越接近這個既定的機率。

林島峰 陳正倉著 雙葉書房發行 2009

第6章 機率論 應用統計學 四版

機率的公理

○ **公理一**
 $0 \leq P(E_i) \leq 1$ ，表示任一事件 E_i 若可能發生，則其機率大於0小於1。若事件不發生，則其機率等於0。若事件一定發生，則機率等於1。

○ **公理二**
 $P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_n)$ ，
 E_1, E_2, \dots, E_n 互斥，表示若有 n 個互斥事件 E_1, E_2, \dots, E_n ，則 E_1 發生或 E_2 發生或 E_n 發生的機率為其個別機率的和。

○ **公理三**
 $P(S) = 1$ ，表示樣本空間中所有事件均發生的機率總合等於1。

林島峰 陳正倉著 雙葉書房發行 2009

第6章 機率論 應用統計學 四版

事件機率

○ **事件機率**
 設事件A定義於隨機實驗的樣本空間，其發生之機率 $P(A)$ 為事件A之基本出象的機率總和，即 $P(A) = \sum P(E_i)$ ， $E_i \in A$ 。

○ **聯合機率**
 二個或二個以上事件同時發生的機率稱為聯合機率。

林島峰 陳正倉著 雙葉書房發行 2009

第6章 機率論 應用統計學 四版

事件機率

表6.2 二事件的聯合 (聯合次數分配)

$A \cap B$	B_1	B_2	...	B_r
A_1	$A_1 \cap B_1$	$A_1 \cap B_2$...	$A_1 \cap B_r$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
A_r	$A_r \cap B_1$	$A_r \cap B_2$...	$A_r \cap B_r$

林島峰 陳正倉著 雙葉書房發行 2009

第6章 機率論 應用統計學 四版

事件機率

表6.3 聯合機率分配表

$A \cap B$	B_1	B_2	...	B_r
A_1	$P(A_1 \cap B_1)$	$P(A_1 \cap B_2)$...	$P(A_1 \cap B_r)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
A_r	$P(A_r \cap B_1)$	$P(A_r \cap B_2)$...	$P(A_r \cap B_r)$

林島峰 陳正倉著 雙葉書房發行 2009

第6章 機率論 應用統計學四版

事件機率

表6.4 男女性別與升遷狀態分析表

		性別 (B)		合計
		男性 (B ₁)	女性 (B ₂)	
升遷狀態 (A)	升遷 (A ₁)	288	36	324
	未升遷 (A ₂)	672	204	876
合計		960	240	1,200

林島玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2009

第6章 機率論 應用統計學四版

事件機率

表6.5 男女性別與升遷狀態的機率表

		性別		P(A _i)
		男性 (B ₁)	女性 (B ₂)	
升遷	升遷 (A ₁)	$P(A_1 \cap B_1) = 0.24$	$P(A_1 \cap B_2) = 0.03$	$P(A_1) = 0.27$
	未升遷 (A ₂)	$P(A_2 \cap B_1) = 0.56$	$P(A_2 \cap B_2) = 0.17$	$P(A_2) = 0.73$
P(B _i)		$P(B_1) = 0.80$	$P(B_2) = 0.20$	1.00

林島玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2009

第6章 機率論 應用統計學四版

事件機率

圖6.5 性別與升遷狀態的樹枝圖

林島玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2009

第6章 機率論 應用統計學四版

事件機率

- **邊際機率**
在有二個或二個以上類別的樣本空間中，若僅考慮某一類別個別發生的機率者稱為邊際機率。
- **條件機率**
令A、B為定義於樣本空間的事件，已知發生事件B之後再發生事件A的機率，稱為事件A的條件機率。

林島玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2009

第6章 機率論 應用統計學四版

表6.6 台灣與美國股市關聯表

		台灣股市		小計
		漲	跌	
美國股市	漲	44	37	81
	跌	36	58	94
小計		80	95	175

林島玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2009

第6章 機率論 應用統計學四版

表6.7 台灣與美國股市漲跌機率表

		台灣股市		小計
		漲	跌	
美國股市	漲	0.25	0.21	0.46
	跌	0.21	0.33	0.55
小計		0.46	0.54	1

林島玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2009

事件的性質與事件機率的運算

- **獨立事件**
獨立事件係指一事件的發生不影響其他事件發生的機率。
- **兩事件獨立**
若A、B兩事件合乎於下列任一條件，則A、B互為獨立。
① $P(A|B) = P(A)$ ② $P(B|A) = P(B)$ ③ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- **相依事件**
相依事件係指一事件的發生影響其他事件發生的機率。
- **互斥事件**
如果事件沒有共同的元素(樣本點)，則稱為互斥事件。

事件的性質與事件機率的運算

- **加法定理**
兩事件的聯集
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
如果事件A與事件B互斥，則
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- **乘法定理**
二事件的交集
 $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$
如果A、B獨立($P(A|B) = P(A)$)，則
 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- **分割定理(條件機率的情形)**
若 A_1, \dots, A_n 為分割集合，B為一事件，則 $P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i)$ ，
且由 $P(B \cap A_i) = P(A_i) \cdot P(B|A_i)$ ，故
 $P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B|A_i)$

事件的性質與事件機率的運算

表6.8 高中應屆畢業生申請參加甄試的結果

		甄試結果		合計
		錄取 (B_1)	不錄取 (B_2)	
性別	男生 (A_1)	175	225	400
	女生 (A_2)	100	200	300
合計		275	425	700

事件的性質與事件機率的運算

表6.9 電機學院甄試結果 6.10 文學院甄試結果

		男	女			男	女
錄取	150	50	錄取	25	50		
不錄取	150	50	不錄取	75	150		
合計	300	100	合計	100	200		

貝氏定理

表6.11 新唱片上市成功的機率

上市情況	機率
成功	0.6
失敗	0.4
合計	1.00

貝氏定理

表6.12 新唱片上市成功與失敗的調查報告表

	上市成功 (A_1)	上市失敗 (A_2)
客戶喜歡 (B)	0.90	0.30
客戶不喜歡 (\bar{B})	0.10	0.70
合計	1.00	1.00

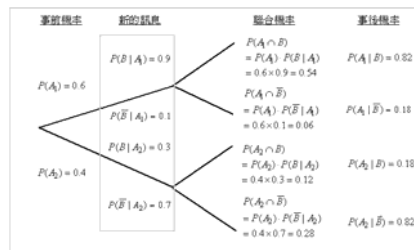
貝氏定理

表6.13 上市成功與失敗的聯合機率分配表

\circ	上市成功 (A_1) \circ	上市失敗 (A_2) \circ	\circ
客戶喜歡 (B) \circ	$P(B \cap A_1) = 0.54$	$P(B \cap A_2) = 0.12$	$P(B) = 0.66$
客戶不喜歡 (\bar{B}) \circ	$P(\bar{B} \cap A_1) = 0.06$	$P(\bar{B} \cap A_2) = 0.28$	$P(\bar{B}) = 0.34$
\circ	$P(A_1) = 0.60$	$P(A_2) = 0.40$	1.00

貝氏定理

圖6.6 貝氏定理的樹枝圖



貝氏定理

若已知 A_1, \dots, A_r 為樣本空間的分割集合， B 為某事件，且已知 $P(A_i)$ 及 $P(B|A_i)$ ，則 B 條件下發生事件 A_i 之機率表為 $P(A_i|B)$ ：

$$P(A_i|B) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)} = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_r)}$$

$$= \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \dots + P(A_r)P(B|A_r)}$$

式中： $P(A_i)$ ：事前機率， $P(B|A_i)$ ：概似機率， $P(A_i|B)$ ：事後機率。

貝氏定理

圖6.7 貝氏定理的應用

