

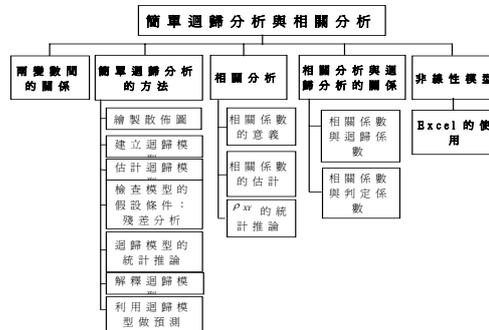
## 15 簡單迴歸分析與相關分析

### 學習目的

1. 了解迴歸分析及相關分析的意義、重要性、估計方法及步驟。
2. 了解如何利用最小平方方法來估計迴歸方程式。
3. 了解判定係數及檢定方法( $t$ 檢定、 $Z$ 檢定與 $F$ 檢定)，及如何評判簡單迴歸方程是否可以接受及迴歸係數是否顯著，以及如何解釋與預測。
4. 了解如何估計與計算簡單相關係數，並檢定相關程度。
5. 了解如何做複迴歸分析包括模型的設定、估計複迴歸方程式。如何使用 $F$ 檢定與 $t$ 檢定來檢定整條迴歸方程式與迴歸係數及如何利用複迴歸模型來做預測。
6. 了解迴歸分析與相關分析在日常經濟活動、企業管理、政府政策等方面的應用。
7. 利用Excel來做迴歸分析與相關分析。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

### 本章結構



林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

### 簡單迴歸分析與相關分析

#### ○ 迴歸分析的意義

迴歸分析是用來分析一個或一個以上自變數與依變數間的數量關係，以了解當自變數為某一水準或數量時，依變數反應的數量或水準。

#### ○ 相關分析的意義

相關分析(correlation analysis)是分析變數間關係的方向與程度大小的統計方法。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

### 簡單迴歸分析的方法

圖15.1 變數間的線性關係

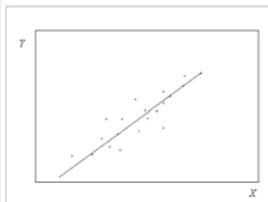
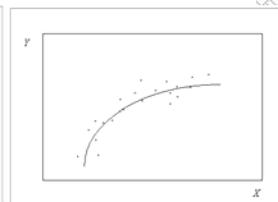


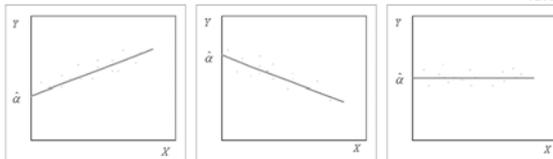
圖15.2 變數間的非線性關係



林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

### 簡單迴歸分析的方法

圖15.3 正向線性關係 圖15.4 負向線性關係 圖15.5 無關係



林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

### 簡單迴歸分析的方法

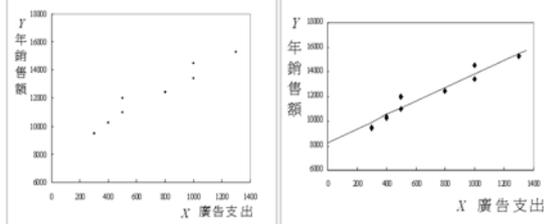
表15.1 廣告支出與銷售收入 單位：萬元

|   | A     | B        | C        |
|---|-------|----------|----------|
| 1 | 分公司名稱 | 廣告支出 $X$ | 年銷售額 $Y$ |
| 2 | 大通    | 300      | 9,500    |
| 3 | 大德    | 400      | 10,300   |
| 4 | 大信    | 500      | 11,000   |
| 5 | 大道    | 500      | 12,000   |
| 6 | 大方    | 800      | 12,400   |
| 7 | 大立    | 1,000    | 13,400   |
| 8 | 大興    | 1,000    | 14,500   |
| 9 | 大展    | 1,300    | 15,300   |

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

簡單迴歸分析的方法

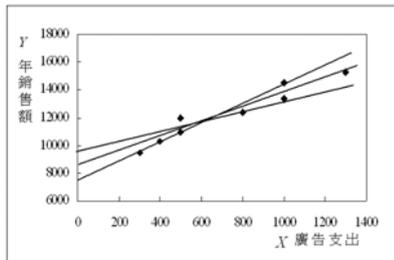
圖15.6 廣告支出與銷售收入的散佈圖 圖15.7 廣告支出與銷售收入的關係



林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

簡單迴歸分析的方法

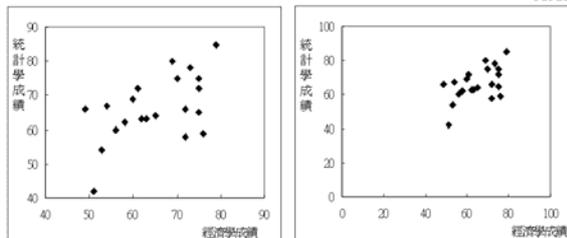
圖15.8 三個廣告支出與銷售收入的直線關係



林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

簡單迴歸分析的方法

圖15.9 數值軸間距較小的散佈圖 圖15.10 數值軸間距較大的散佈圖



林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

簡單迴歸分析的方法

○簡單線性迴歸模型

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i \quad i = 1, \dots, n$$

$\alpha$ 、 $\beta$  為迴歸模型的參數， $\alpha$  稱為截距， $\beta$  稱為迴歸係數 (regression coefficient) 或斜率， $\varepsilon_i$  為隨機誤差。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

簡單迴歸分析的方法

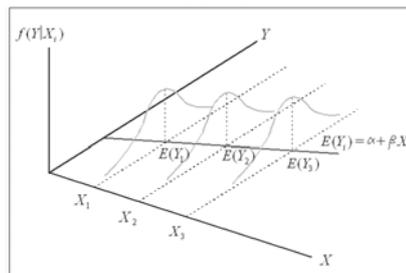
○迴歸模型的假設條件

- ①  $E(\varepsilon_i) = 0$   
是指在  $X = X_i$  條件下，每一組的殘差項的平均數為0。
- ②  $V(\varepsilon_i) = \sigma^2$  變異數齊一性  
每一組的殘差項的變異數均相等，我們稱為變異數齊一性。
- ③  $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \quad i \neq j \quad i, j = 1, \dots, n$   
任何一組  $\varepsilon_i$  與  $\varepsilon_j$  的共變數為0，即  $\varepsilon_i$  與  $\varepsilon_j$  間無關。
- ④  $Cov(\varepsilon_i, X) = 0$  或  $E(\varepsilon_i X) = 0 \quad i = 1, \dots, n$   
即  $\varepsilon_i$  與  $X$  無關。
- ⑤  $X$  為固定變數或事前決定的變數， $Y_i$  為隨機變數。
- ⑥  $\varepsilon_i$  為常態分配及  $Y_i$  為常態分配  
各組殘差項為常態分配，或各組之依變數為常態分配。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

簡單迴歸分析的方法

圖15.11 簡單迴歸模型



林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

簡單迴歸分析的方法

○ 普通最小平方法

普通最小平方法是使樣本觀察值與估計值的差異之平方和為最小的估計方法。即是使得  $SSE = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_i)^2$  為最小而求取  $\hat{\alpha}$ 、 $\hat{\beta}$  的方法。利用此一估計方法所得到的估計式稱為普通最小平方估計式(ordinary least squares estimator, OLSE)。

簡單迴歸分析的方法

○ 迴歸估計式

$$\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i$$

式中， $\hat{Y}_i$  為  $E(Y_i)$  的估計式， $\hat{\alpha}$ 、 $\hat{\beta}$  分別為  $\alpha$ 、 $\beta$  的估計式。

○ 觀察值與估計值之差的平方和

$$SSE = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_i)^2$$

○ 標準方程式

$$\sum Y = n\hat{\alpha} + \hat{\beta}\sum X$$

$$\sum XY = \hat{\alpha}\sum X + \hat{\beta}\sum X^2$$

簡單迴歸分析的方法

○  $\beta$  的估計式  $\hat{\beta}$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{\sum(X - \bar{X})^2} = \frac{\sum xy}{\sum x^2}$$

○  $\alpha$  的估計式  $\hat{\alpha}$

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X}$$

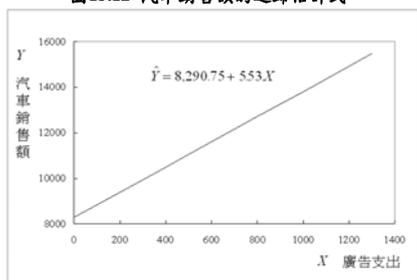
簡單迴歸分析的方法

表15.2 最小平方法的計算

| $x$   | $X_i$  | $Y_i$   | $(X_i - \bar{X})$ | $(Y_i - \bar{Y})$ | $(X_i - \bar{X})^2$ | $(Y_i - \bar{Y})^2$ | $(X_i - \bar{X}) \cdot (Y_i - \bar{Y})$ |
|-------|--------|---------|-------------------|-------------------|---------------------|---------------------|---|
| $\nu$ | 300.   | 9,500.  | -425.             | -2,800.           | 180,625.            | 7,840,000.          | 1,190,000.                              |
| $\nu$ | 400.   | 10,300. | -325.             | -2,000.           | 105,625.            | 4,000,000.          | 650,000.                                |
| $\nu$ | 500.   | 11,000. | -225.             | -1,300.           | 50,625.             | 1,690,000.          | 292,500.                                |
| $\nu$ | 500.   | 12,000. | -225.             | -300.             | 50,625.             | 90,000.             | 67,500.                                 |
| $\nu$ | 800.   | 12,400. | 75.               | 100.              | 5,625.              | 10,000.             | 7,500.                                  |
| $\nu$ | 1,000. | 13,400. | 275.              | 1,100.            | 75,625.             | 1,210,000.          | 302,500.                                |
| $\nu$ | 1,000. | 14,500. | 275.              | 2,200.            | 75,625.             | 4,840,000.          | 605,000.                                |
| $\nu$ | 1,300. | 15,300. | 575.              | 3,000.            | 330,625.            | 9,000,000.          | 1,725,000.                              |
| 總合    | 5,800. | 98,400. | 0.                | 0.                | 875,000.            | 28,680,000.         | 4,840,000.                              |
| 平均數   | 725.   | 12,300. | 0.                | 0.                | 109,375.            | 3,585,000.          | 605,000.                                |

簡單迴歸分析的方法

圖15.12 汽車銷售額的迴歸估計式



簡單迴歸分析的方法

○ 最小平方估計式的性質

①  $\hat{\alpha}$ 、 $\hat{\beta}$  為  $\alpha$ 、 $\beta$  的不偏估計式，即  $E(\hat{\alpha}) = \alpha$ ， $E(\hat{\beta}) = \beta$ 。

②  $V(\hat{\alpha}) = \frac{\sum X^2}{n \sum x^2} \sigma^2$ ， $V(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{\sum x^2}$ 。

③  $\hat{\alpha}$ 、 $\hat{\beta}$  的抽樣分配為：

$$\hat{\alpha} \sim N\left(\alpha, \frac{\sum X^2}{n \sum x^2} \sigma^2\right), \hat{\beta} \sim N\left(\beta, \frac{\sigma^2}{\sum x^2}\right)$$

④  $\hat{\alpha}$ 、 $\hat{\beta}$  均為最小變異線性不偏估計式(best linear unbiased estimator BLUE)，亦即  $\hat{\alpha}$ 、 $\hat{\beta}$  是所有線性不偏估計式中變異數最小的估計式，我們簡稱為BLUE。

簡單迴歸分析的方法

圖15.14 的抽樣分配

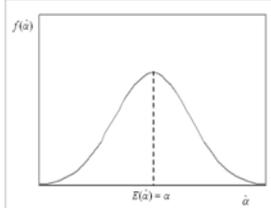
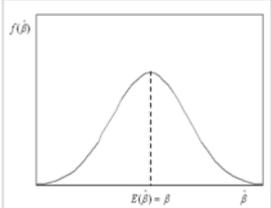


圖15.15 的抽樣分配



林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

簡單迴歸分析的方法

○ Gauss-Markov 定理

在下列假設條件下：

- ①  $E(\varepsilon_i) = 0$ ，殘差項為 0
- ②  $V(\varepsilon_i) = \sigma^2$ ，殘差項具變異數齊一性
- ③  $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, i \neq j$ ，無自我相關
- ④  $Cov(\varepsilon_i, X) = 0$ ， $X$  與  $\varepsilon_i$  無相關

利用最小平方方法求得之估計式 (OLSE) 為一最佳線性不偏估計式 (BLUE)。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

簡單迴歸分析的方法

○  $\sigma^2$  的估計式

$$S^2_{vix} = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_i)^2}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}{n-2}$$

上式中  $n-2$  為  $\sum \varepsilon_i^2$  的自由度， $S^2_{vix}$  可被證明為  $\sigma^2$  的不偏估計式。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

簡單迴歸分析的方法

圖15.15 迴歸分析的對話方塊



林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

簡單迴歸分析的方法

表15.3 廣告支出與營業收入的迴歸結果

|    | A    | B         | C        | D       | E      |
|----|------|-----------|----------|---------|--------|
| 16 |      | 係數        | 標準誤      | t 統計    | P-值    |
| 17 | 截距   | 8289.7143 | 480.3783 | 17.2566 | 0.0000 |
| 18 | 廣告支出 | 5.5314    | 0.6028   | 9.1757  | 0.0001 |

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

簡單迴歸分析的方法

○ 殘差分析

殘差分析用來判斷殘差項  $\varepsilon$  的假設條件是否成立。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

簡單迴歸分析的方法

○ 殘差分析

- 檢查變異數齊性
- 檢查序列相關
- 檢查模型是否為線性模型
- 檢查模型是否為常態分配

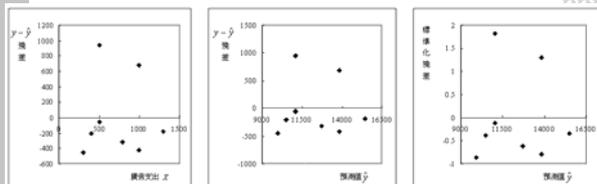
簡單迴歸分析的方法

表15.4 銷售額的預測值與殘差值

|    | A    | B                   | C        | D      |
|----|------|---------------------|----------|--------|
| 22 | 殘差輸出 |                     |          |        |
| 23 |      |                     |          |        |
| 24 | 觀察值  | 預測值(年銷售額) $\hat{y}$ | 殘差       | 標準化殘差  |
| 25 | 1    | 9949.143            | -449.143 | -0.860 |
| 26 | 2    | 10502.286           | -202.286 | -0.387 |
| 27 | 3    | 11055.429           | -55.429  | -0.106 |
| 28 | 4    | 11055.429           | 944.571  | 1.809  |
| 29 | 5    | 12714.857           | -314.857 | -0.603 |
| 30 | 6    | 13821.143           | -421.143 | -0.807 |
| 31 | 7    | 13821.143           | 678.857  | 1.300  |
| 32 | 8    | 15480.571           | -180.571 | -0.346 |

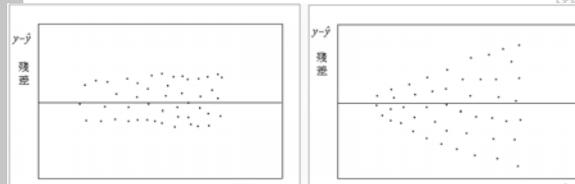
簡單迴歸分析的方法

圖15.16 對X的殘差圖 圖15.17 對 $\hat{y}$ 的殘差圖 圖15.18 對 $\hat{y}$ 的標準殘差圖



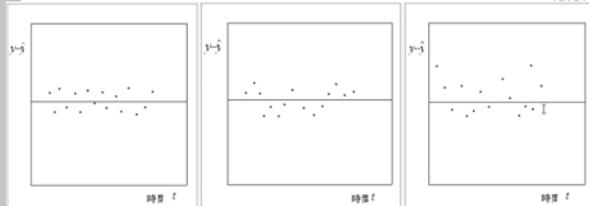
簡單迴歸分析的方法

圖15.19 對 $\hat{y}$ 的殘差圖 圖15.20 對 $\hat{y}$ 的殘差圖



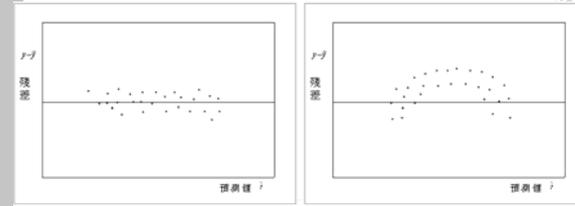
簡單迴歸分析的方法

圖15.21 時間序列相關 圖15.22 時間序列相關 圖15.23 無序列相關



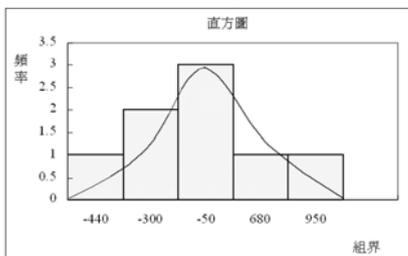
簡單迴歸分析的方法

圖15.24 線性模型的殘差圖 圖15.25 非線性模型的殘差圖



簡單迴歸分析的方法

圖15.26 殘差值直方圖



林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

簡單迴歸分析的方法

○迴歸模型的統計推論

在估計完成並且檢定模型的假設條件符合之後，必須進行下列二種檢視，以判定所估計的迴歸模型或參數是否可接受：①理論上的判斷，②統計上的檢定。而在檢定時則考慮：●檢視迴歸方程式的配適度為何，●對迴歸係數作檢定或區間估計。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

簡單迴歸分析的方法

圖15.27 殘差值直方圖

| 資料 A <sub>i</sub> |                | 資料 B <sub>i</sub> |                | 資料 C <sub>i</sub> |                | 資料 D <sub>i</sub> |                |
|-------------------|----------------|-------------------|----------------|-------------------|----------------|-------------------|----------------|
| X <sub>i</sub>    | Y <sub>i</sub> |
| 10                | 8.04           | 10                | 9.14           | 10                | 7.46           | 8                 | 6.58           |
| 14                | 9.96           | 14                | 8.1            | 14                | 8.84           | 8                 | 5.76           |
| 5                 | 5.68           | 5                 | 4.74           | 5                 | 5.73           | 8                 | 7.71           |
| 8                 | 6.95           | 8                 | 8.14           | 8                 | 6.77           | 8                 | 8.84           |
| 9                 | 8.81           | 9                 | 8.77           | 9                 | 7.11           | 8                 | 8.47           |
| 12                | 10.84          | 12                | 9.13           | 12                | 8.15           | 8                 | 7.04           |
| 4                 | 4.26           | 4                 | 3.1            | 4                 | 5.39           | 8                 | 5.25           |
| 7                 | 4.82           | 7                 | 7.26           | 7                 | 6.42           | 19                | 12.5           |
| 11                | 8.33           | 11                | 9.26           | 11                | 7.81           | 8                 | 5.56           |
| 13                | 7.58           | 13                | 8.74           | 13                | 12.74          | 8                 | 7.91           |
| 6                 | 7.24           | 6                 | 6.13           | 6                 | 6.08           | 8                 | 6.89           |

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

簡單迴歸分析的方法

圖15.28A

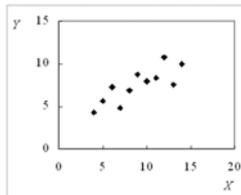
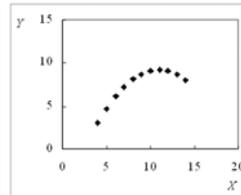


圖15.28B



林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

簡單迴歸分析的方法

圖15.28C

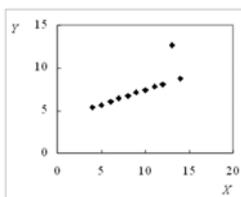
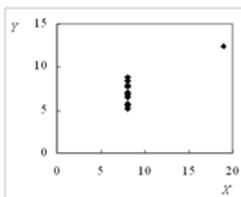


圖15.28D



林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

簡單迴歸分析的方法

圖15.28A

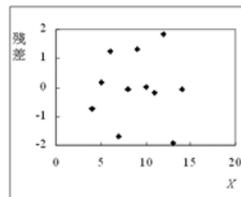
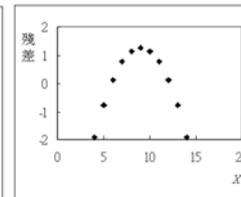
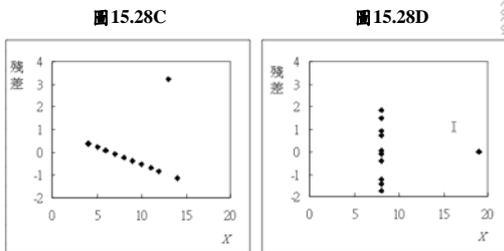


圖15.28B



林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

簡單迴歸分析的方法



林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

簡單迴歸分析的方法

(1) 迴歸方程式的配適度

○ 依變數的總差異

$$Y_i - \bar{Y} = (\hat{Y}_i - \bar{Y}) + (Y_i - \hat{Y}_i)$$

總差異 = 可解釋的差異 + 隨機差異

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

總變異 = 可解釋的變異 + 隨機變異

○ 樣本迴歸方程式的判定係數  $R^2$

$$R^2 = \frac{\text{可解釋的變異}}{\text{總變異}} = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST}$$

$$\text{即 } R^2 = \frac{\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2} = 1 - \frac{\sum(Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2}$$

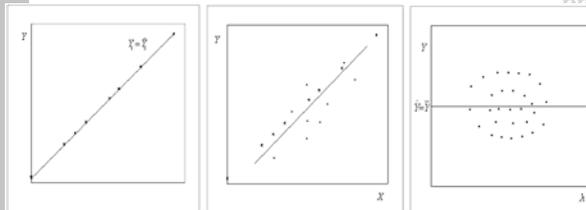
林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

簡單迴歸分析的方法

圖 15.30  $R^2 = 1$

圖 15.31  $R^2 = 0.8$

圖 15.32  $R^2 = 0$



林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

簡單迴歸分析的方法

表 15.6 判定係數的計算

| $X_i$ | $Y_i$  | $(Y_i - \bar{Y})^2$ | $\hat{Y}_i$ | $(Y_i - \hat{Y}_i)^2$ |
|-------|--------|---------------------|-------------|-----------------------|
| 300   | 9,500  | 7,840,000           | 9,949.75    | 202,275               |
| 400   | 10,300 | 4,000,000           | 10,502.75   | 41,108                |
| 500   | 11,000 | 1,690,000           | 11,055.75   | 3,108                 |
| 500   | 12,000 | 90,000              | 11,055.75   | 891,608               |
| 800   | 12,400 | 10,000              | 12,714.75   | 99,068                |
| 1,000 | 13,400 | 1,210,000           | 13,820.75   | 177,031               |
| 1,000 | 14,500 | 4,840,000           | 13,820.75   | 461,381               |
| 1,300 | 15,300 | 9,000,000           | 15,479.75   | 32,310                |
| 總和    |        | 28,680,000          |             | 1,907,889             |

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

簡單迴歸分析的方法

表 15.7 迴歸式的判定係數

|   | A        | B           | C        |
|---|----------|-------------|----------|
| 3 | 迴歸統計     |             |          |
| 4 | R 的倍數    | 0.966166025 |          |
| 5 | R 平方     | 0.933476788 | $R^2$    |
| 6 | 調整的 R 平方 | 0.922389586 |          |
| 7 | 標準誤      | 563.8979982 | $S_{YX}$ |
| 8 | 觀察值個數    | 8           |          |

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

簡單迴歸分析的方法

表 15.8 簡單迴歸變異數分析表

| 變異來源 | 平方和 (SS)  | 自由度 (df) | 平均平方和 (MS)                | F                     |
|------|---|----------|---------------------------|-----------------------|
| 迴歸   | $SSR = \sum \hat{y}^2 = \sum (\hat{Y} - \bar{Y})^2$ | 1        | $MSR = \frac{SSR}{1}$     | $F = \frac{MSR}{MSE}$ |
| 誤差   | $SSE = \sum e^2 = \sum (Y - \hat{Y})^2$             | $n - 2$  | $MSE = \frac{SSE}{n - 2}$ |                       |
| 總和   | $SST = \sum y^2 = \sum (Y - \bar{Y})^2$             | $n - 1$  |                           |                       |

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

第15章 簡單迴歸分析與相關分析 應用統計學 四版

### 簡單迴歸分析的方法

② F檢定

○ F檢定統計量

$$F = \frac{\sum(\hat{Y} - \bar{Y})^2 / 1}{\sum(Y - \hat{Y}) / n - 2} = \frac{\sum \hat{Y}^2 / 1}{\sum e^2 / n - 2} = \frac{MSR}{MSE} \sim F_{1, n-2}$$

○ 決策法則

①  $F > F_{1, n-2, \alpha}$  時，則拒絕  $H_0$ 。

②  $F \leq F_{1, n-2, \alpha}$  時，則接受  $H_0$ 。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

第15章 簡單迴歸分析與相關分析 應用統計學 四版

### 簡單迴歸分析的方法

表15.9 廣告支出與銷售額的變異數分析

| 變異來源 | 平方和 (SS)   | 自由度 (df) | 平均平方和 (MS) | F     |
|------|------------|----------|------------|-------|
| 迴歸   | 26,758,287 | 1        | 26,758,287 | 83.54 |
| 隨機   | 1,921,713  | 6        | 320,286    |       |
| 總和   | 28,680,000 | 7        |            |       |

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

第15章 簡單迴歸分析與相關分析 應用統計學 四版

### 簡單迴歸分析的方法

表15.10 迴歸式的ANOVA表及F值

|    | A     | B   | C          | D           | E       | F          |
|----|-------|-----|------------|-------------|---------|------------|
| 10 | ANOVA |     |            |             |         |            |
| 11 |       | 自由度 | SS         | MS          | F       | 顯著值        |
| 12 | 迴歸    | 1   | 26772114.3 | 26772114.29 | 84.1941 | 0.00009439 |
| 13 | 殘差    | 6   | 1907885.71 | 317980.9524 |         |            |
| 14 | 總和    | 7   | 28680000   |             |         |            |

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

第15章 簡單迴歸分析與相關分析 應用統計學 四版

### 簡單迴歸分析的方法

(2) 對個別迴歸係數作統計推論

① 對  $\beta$  的檢定

○ Z檢定統計量 ( $\sigma^2$  已知)

$$\frac{\hat{\beta} - \beta}{\frac{\sigma}{\sqrt{\sum x^2}}} = \frac{\hat{\beta} - \beta}{\sigma_{\hat{\beta}}} \sim Z$$

○ t檢定統計量 ( $\sigma^2$  未知)

$$\frac{\hat{\beta} - \beta}{\frac{S_{Y|X}}{S_{\hat{\beta}}}} = \frac{\hat{\beta} - \beta}{S_{\hat{\beta}}} \sim t_{n-2}$$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

第15章 簡單迴歸分析與相關分析 應用統計學 四版

### 簡單迴歸分析的方法

表15.11 迴歸式的係數與標準誤

|    | A      | B         | C        | D       | E      |
|----|--------|-----------|----------|---------|--------|
| 16 |        | 係數        | 標準誤      | t統計     | P-值    |
| 17 | 截距     | 8289.7143 | 480.3783 | 17.2566 | 0.0000 |
| 18 | 廣告支出 X | 5.5314    | 0.6028   | 9.1757  | 0.0001 |

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

第15章 簡單迴歸分析與相關分析 應用統計學 四版

### 簡單迴歸分析的方法

② 對  $\alpha$  的檢定

○ Z檢定統計量 ( $\sigma^2$  已知)

$$\frac{\hat{\alpha} - \alpha}{\frac{\sigma}{\sqrt{\sum X^2}}} = Z$$

○ t檢定統計量 ( $\sigma^2$  未知)

$$\frac{\hat{\alpha} - \alpha}{S_{Y|X} \sqrt{\frac{\sum X^2}{n \sum x^2}}} \sim t_{n-2}$$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

簡單迴歸分析的方法

③  $\beta$  的區間估計

○  $\beta$  的信賴區間 ( $\sigma^2$  已知)

$$\hat{\beta} - Z_{\alpha/2}\sigma_{\hat{\beta}} \leq \beta \leq \hat{\beta} + Z_{\alpha/2}\sigma_{\hat{\beta}}$$

其中： $\sigma_{\hat{\beta}} = \frac{\sigma}{\sqrt{\sum x^2}}$

○  $\beta$  的信賴區間 ( $\sigma^2$  未知)

$$\hat{\beta} - t_{n-2, \alpha/2} S_{\hat{\beta}} \leq \beta \leq \hat{\beta} + t_{n-2, \alpha/2} S_{\hat{\beta}}$$

其中  $S_{\hat{\beta}} = \frac{S_{y/x}}{\sqrt{\sum x^2}}$

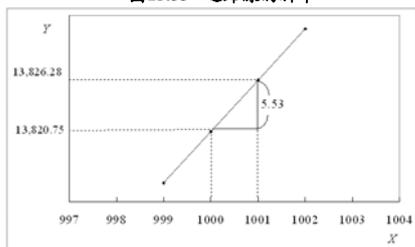
簡單迴歸分析的方法

表15.12  $\beta$  的 95% 的信賴區間

|    | A      | B           | C           |
|----|--------|-------------|-------------|
| 16 |        | 下限 95%      | 上限 95%      |
| 17 | 截距     | 7114.270911 | 9465.157661 |
| 18 | 廣告支出 X | 4.056351033 | 7.00650611  |

簡單迴歸分析的方法

圖15.33 迴歸線的斜率



簡單迴歸分析的方法

(1) 在既定  $X_0$  下預測母體平均數  $E(Y | X_0)$

○  $E(Y | X_0)$  的信賴區間 (母體變異數已知)

$$\hat{Y}_0 \pm Z_{\alpha/2} \sigma_{\hat{Y}_0}$$

$\hat{Y}_0$  的估計變異數

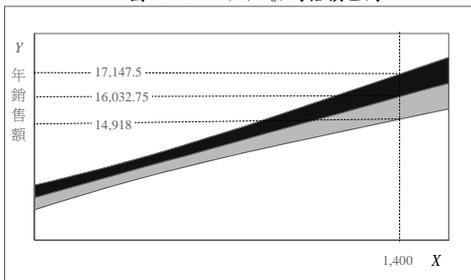
$$S_{\hat{Y}_0}^2 = S_{y/x}^2 \left[ \frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{\sum x^2} \right]$$

○  $E(Y | X_0)$  的信賴區間 (母體變異數未知)

$$\hat{Y}_0 \pm t_{n-2, \alpha/2} S_{\hat{Y}_0}$$

簡單迴歸分析的方法

圖15.34  $E(Y | X_0)$  的信賴區間



簡單迴歸分析的方法

○  $t$  檢定統計量

$$\frac{\hat{Y} - E_0}{S_{\hat{Y}_0}} \sim t_{n-2}$$

簡單迴歸分析的方法

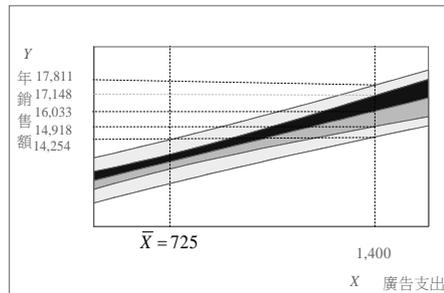
(2)在既定  $X_0$  預測新觀察值  $Y_0$

○  $Y_0$  的信賴區間

$$\hat{Y}_0 \pm t_{n-2, \alpha/2} S_{e_0}$$

簡單迴歸分析的方法

圖15.35  $E(Y|X_0)$  與  $Y_0$  信賴區間



簡單迴歸分析的方法

表15.13 臺灣地區各縣市的所得與消費

| 縣市別 | 平均年所得     | 平均年消費   | 縣市別 | 平均年所得   | 平均年消費   |
|-----|-----------|---------|-----|---------|---------|
| 台北市 | 1,287,803 | 963,713 | 台中縣 | 834,273 | 695,080 |
| 高雄市 | 980,360   | 739,607 | 彰化縣 | 776,371 | 627,431 |
| 基隆市 | 851,508   | 651,949 | 南投縣 | 722,209 | 592,259 |
| 新竹市 | 1,277,464 | 933,566 | 雲林縣 | 663,716 | 501,511 |
| 台中市 | 1,049,053 | 808,437 | 嘉義縣 | 638,887 | 533,186 |
| 嘉義市 | 730,039   | 586,020 | 台南縣 | 738,863 | 610,405 |
| 台南市 | 921,877   | 751,125 | 高雄縣 | 791,925 | 517,054 |
| 台北縣 | 912,968   | 751,125 | 屏東縣 | 796,114 | 593,006 |
| 桃園縣 | 1,003,789 | 746,550 | 宜蘭縣 | 750,870 | 669,509 |
| 新竹縣 | 910,180   | 724,042 | 花蓮縣 | 724,680 | 566,608 |
| 苗栗縣 | 826,541   | 637,262 | 台東縣 | 720,459 | 518,103 |
| 澎湖縣 | 644,462   | 474,657 |     |         |         |

簡單迴歸分析的方法

表15.14 可支配所得 (Y) 對消費支出 (X) 的迴歸結果

|    | A     | B            | C            | D         | E        |
|----|-------|--------------|--------------|-----------|----------|
| 16 |       | 係數           | 標準誤          | t 統計      | P-值      |
| 17 | 截距    | 66194.426423 | 41385.683310 | 1.599452  | 0.124658 |
| 18 | 平均年所得 | 0.699065     | 0.047703     | 14.654638 | 0.000000 |

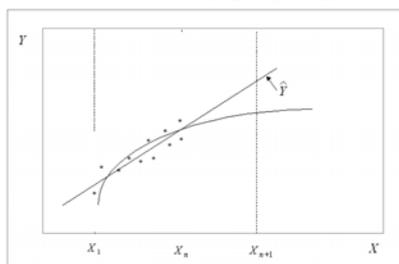
簡單迴歸分析的方法

表15.15 迴歸式的判定係數與F值

|    | A        | B        | C                 | D                 | E        | F      |
|----|----------|----------|-------------------|-------------------|----------|--------|
| 3  | 迴歸統計     |          |                   |                   |          |        |
| 4  | R 的指數    | 0.954424 |                   |                   |          |        |
| 5  | R 平方     | 0.910926 |                   |                   |          |        |
| 6  | 調整的 R 平方 | 0.906684 |                   |                   |          |        |
| 7  | 標準誤      | 39533.26 |                   |                   |          |        |
| 8  | 觀察值個數    | 23       |                   |                   |          |        |
| 9  |          |          |                   |                   |          |        |
| 10 | ANOVA    |          |                   |                   |          |        |
| 11 |          | 自由度      | SS                | MS                | F        | 顯著值    |
| 12 | 迴歸       | 1        | 335641390937.7830 | 335641390937.7830 | 214.7584 | 0.0000 |
| 13 | 殘差       | 21       | 32820457350.8258  | 1562878921.4679   |          |        |
| 14 | 總和       | 22       | 368461848288.6090 |                   |          |        |

簡單迴歸分析的方法

圖15.36 預測時模型改變的危險



相關分析

○ 相關係數的意義

變數間的關係可分為獨立與不獨立（相關）。相關係數是用來表示變數間關係的方向與程度的大小。

相關分析

○ 相關係數

$$\begin{aligned} \rho_{XY} &= E\left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \right) \left(\frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y}\right) \\ &= \frac{E(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \\ &= \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} \end{aligned}$$

式中： $\rho_{XY}$  為X、Y隨機變數的相關係數， $\mu_X$ 、 $\sigma_X$  為X的平均數與標準差， $\mu_Y$ 、 $\sigma_Y$  為Y的平均數與標準差， $\sigma_{XY}$  為X與Y的共變數。

相關分析

○ 樣本的相關係數

$$\begin{aligned} r_{XY} &= \frac{\sum(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{\sqrt{\sum(X - \bar{X})^2} \sqrt{\sum(Y - \bar{Y})^2}} \\ &= \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2} \sqrt{\sum y^2}} = \frac{S_{XY}}{S_X S_Y} \end{aligned}$$

式中： $x = X - \bar{X}$   $y = Y - \bar{Y}$ ， $S_{XY} = \frac{\sum(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{n-1}$

（樣本共變數）， $S_X = \sqrt{\frac{\sum(X - \bar{X})^2}{n-1}}$  (X的樣本標準差)，

$S_Y = \sqrt{\frac{\sum(Y - \bar{Y})^2}{n-1}}$  (Y的樣本標準差)。

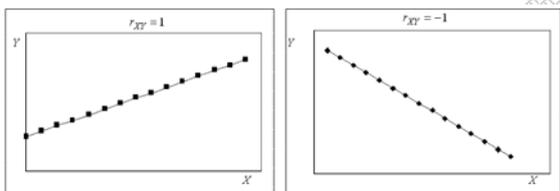
相關分析

表15.16 廣告與銷售額的相係數

|   | A      | B           | C      |
|---|--------|-------------|--------|
| 1 |        | 廣告支出 X      | 年銷售額 Y |
| 2 | 廣告支出 X | 1           |        |
| 3 | 年銷售額 Y | 0.966166025 | 1      |

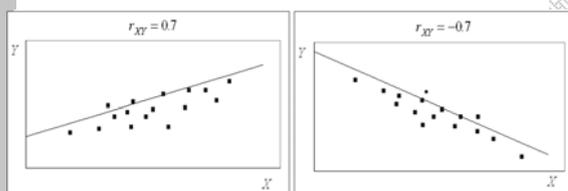
相關分析

圖15.37  $r_{XY}$  在各種可能值時的散佈圖



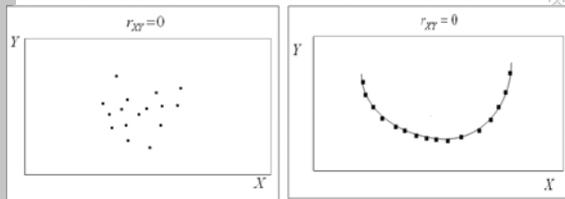
相關分析

圖15.37  $r_{XY}$  在各種可能值時的散佈圖



相關分析

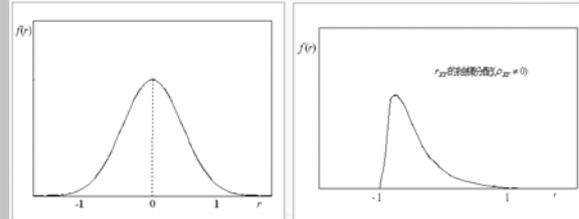
圖 15.37  $r_{XY}$  在各種可能值時的散佈圖



林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

相關分析

圖 15.38  $r_{XY}$  的抽樣分配  $\rho_{XY} = 0$  圖 15.39  $r_{XY}$  的抽樣分配  $\rho_{XY} \neq 0$



林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

相關分析

○  $t$  檢定統計量

$$\frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}} \sim t_{n-2}$$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

相關分析與迴歸分析的關係

○  $\hat{\beta}$  與  $r_{XY}$  間的關係

$$\hat{\beta} = r_{XY} \frac{S_Y}{S_X}$$

○ 相關係數與判定係數

$$r_{XY}^2 = R^2$$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

相關分析與迴歸分析的關係

表 15.17 專利數與研究發展經費

| 年<br>(民國) | 美國核准專利<br>(單位：件數) | 全國研究發展經費<br>(單位：新台幣百萬元) |
|-----------|-------------------|-------------------------|
| 86年       | 2,057             | 156,321                 |
| 87年       | 3,100             | 176,455                 |
| 88年       | 3,693             | 190,520                 |
| 89年       | 4,667             | 197,631                 |
| 90年       | 5,371             | 204,974                 |
| 91年       | 5,431             | 224,428                 |
| 92年       | 5,298             | 242,942                 |
| 93年       | 5,938             | 263,271                 |
| 94年       | 5,118             | 280,980                 |
| 95年       | 6,360             | 307,037                 |
| 96年       | 6,128             | 331,386                 |

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

相關分析與迴歸分析的關係

表 15.18 相關係數與判定係數

|   | A        | B           | C    | D               |
|---|----------|-------------|------|-----------------|
| 3 | 迴歸統計     |             |      |                 |
| 4 | R 的倍數    | 0.966166025 | 相關係數 | $r_{XY}$        |
| 5 | R 平方     | 0.933476788 | 判定係數 | $R^2$           |
| 6 | 調整的 R 平方 | 0.922389586 |      |                 |
| 7 | 標準誤      | 563.8979982 |      | $S_{\hat{Y}_X}$ |
| 8 | 觀察值個數    | 8           |      |                 |

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

相關分析與迴歸分析的關係

表15.19 身高與薪資

|    |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 身高 | 180.1  | 156.7  | 172.7  | 167.2  | 182.2  | 168.9  | 169.3  | 171.4  | 169.9  | 165.2  | 175.7  |
| 薪資 | 43,300 | 49,200 | 44,100 | 32,000 | 36,000 | 40,900 | 34,000 | 57,800 | 42,500 | 46,400 | 35,000 |
| 身高 | 158.8  | 163.8  | 169.4  | 178.2  | 167.5  | 175    | 171.7  | 158.4  | 167.7  | 158.5  | 153.9  |
| 薪資 | 41,000 | 43,100 | 50,500 | 22,700 | 26,300 | 42,800 | 40,900 | 41,900 | 41,100 | 23,800 | 40,600 |
| 身高 | 158.2  | 164.7  | 164.7  | 146.8  | 153.8  | 161.8  | 168.1  | 160.6  | 158.1  | 157.3  | 159.2  |
| 薪資 | 29,500 | 31,600 | 30,300 | 39,500 | 34,400 | 26,600 | 29,900 | 34,100 | 39,000 | 25,600 | 33,300 |

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

相關分析與迴歸分析的關係

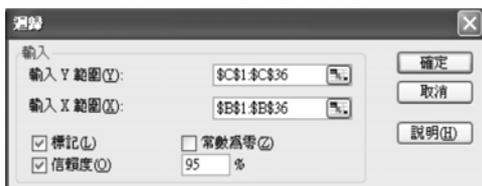
表15.20 台灣證券交易所各類股票報酬率 單位：%

| 年 月    | 大盤報酬率 | 電子類股票報酬率 | 金融類股票報酬率 |
|--------|-------|----------|----------|
| Jan-94 | -2.37 | -1.35    | -3.68    |
| Feb-94 | 3.56  | 5.03     | 1.15     |
| Mar-94 | -3.25 | -2.67    | -5.46    |
| Apr-94 | -3.13 | -1.97    | -4.82    |
| May-94 | 3.33  | 7.12     | 2.71     |
| Jun-94 | 3.83  | 3.63     | 2.66     |
| Jul-94 | 1.12  | 3.99     | 1.38     |
| Aug-94 | -4.41 | -5.63    | -5.34    |
| Sep-94 | 1.41  | 3.16     | -1.24    |
| Oct-94 | -5.79 | -6.67    | -6.51    |
| Nov-94 | 7.62  | 12.08    | 3.09     |
| Dec-94 | 5.56  | 7.8      | 0.67     |
| Jan-95 | -0.25 | -0.37    | -0.21    |
| Feb-95 | 0.45  | -0.92    | 4.72     |
| Mar-95 | 0.8   | 3.04     | -5.79    |
| Apr-95 | 8.43  | 7.33     | 13.62    |
| May-95 | -4.53 | -6.17    | -4.23    |
| Jun-95 | -2.08 | -5.11    | 1.83     |
| Jul-95 | -3.73 | -2.99    | -4.15    |
| Aug-95 | 2.44  | 5.67     | -4.93    |
| Sep-95 | 4.1   | 2.82     | 7.31     |
| Oct-95 | 2.01  | 1.53     | 0.14     |

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

相關分析與迴歸分析的關係

圖15.40 迴歸分析的對話方塊



林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

相關分析與迴歸分析的關係

表15.21 電子類股票報酬率的迴歸結果

|    | A    | B           | C           | D           | E           |
|----|------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 16 |      | 係數          | 標準誤         | t 統計        | P-值         |
| 17 | 截距   | 0.202289445 | 0.278022274 | 0.727601576 | 0.471838596 |
| 18 | 加權指數 | 1.07949116  | 0.061941788 | 17.4275104  | 1.60113E-18 |

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

相關分析與迴歸分析的關係

表15.22 電子類股票迴歸式的判定係數與ANOVA表及F值

|    | A        | B          | C          | D          | E          | F       |
|----|----------|------------|------------|------------|------------|---------|
| 3  | 迴歸統計     |            |            |            |            |         |
| 4  | R 的係數    | 0.94832712 |            |            |            |         |
| 5  | R 平方     | 0.89932432 |            |            |            |         |
| 6  | 調整的 R 平方 | 0.89636327 |            |            |            |         |
| 7  | 標準誤      | 1.62573264 |            |            |            |         |
| 8  | 觀察值個數    | 36         |            |            |            |         |
| 9  |          |            |            |            |            |         |
| 10 | ANOVA    |            |            |            |            |         |
| 11 |          | 自由度        | SS         | MS         | F          | 顯著值     |
| 12 | 迴歸       | 1          | 802.728997 | 802.728997 | 303.718119 | 1.6E-18 |
| 13 | 殘差       | 34         | 89.862225  | 2.64300662 |            |         |
| 14 | 總和       | 35         | 892.591222 |            |            |         |

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

相關分析與迴歸分析的關係

表15.23 金融類股票報酬率的迴歸結果

|    | A    | B            | C           | D            | E           |
|----|------|--------------|-------------|--------------|-------------|
| 16 |      | 係數           | 標準誤         | t 統計         | P-值         |
| 17 | 截距   | -1.181526776 | 0.51850477  | -2.278719201 | 0.029084467 |
| 18 | 加權指數 | 1.005385744  | 0.115519927 | 8.70313697   | 3.60485E-10 |

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

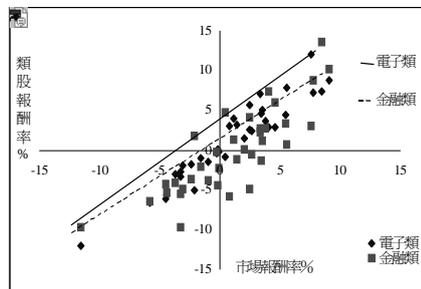
相關分析與迴歸分析的關係

表15.24 金融類股票迴歸式的判定係數與ANOVA表及F值

|    | A        | B           | C           | D           | E           | F           |
|----|----------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 3  | 迴歸統計     |             |             |             |             |             |
| 4  | R 的係數    | 0.830776594 |             |             |             |             |
| 5  | R 平方     | 0.690189748 |             |             |             |             |
| 6  | 調整的 R 平方 | 0.681077682 |             |             |             |             |
| 7  | 標準誤      | 3.03195178  |             |             |             |             |
| 8  | 觀察值個數    | 36          |             |             |             |             |
| 9  | ANOVA    |             |             |             |             |             |
| 11 |          | 自由度         | SS          | MS          | F           | 顯著值         |
| 12 | 迴歸       | 1           | 696.2997146 | 696.2997146 | 75.74459312 | 3.60485E-10 |
| 13 | 殘差       | 34          | 312.5528743 | 9.192731598 |             |             |
| 14 | 總和       | 35          | 1008.852589 |             |             |             |

相關分析與迴歸分析的關係

圖15.41 兩類股票的報酬率



非線性模型

○ 二次式模型

$$Y_i = \alpha + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \epsilon$$

○ 指數模型

$$Y = Ae^{bX} \epsilon$$

○ 雙對數模型

$$Y = AX^\beta \epsilon$$

○ 對數模型

$$e^Y = \alpha X^\beta \epsilon$$

非線性模型

圖15.42 成本函數

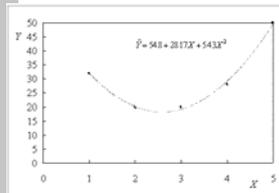
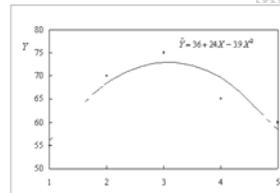


圖15.43 生產函數



非線性模型

圖15.44 指數模型  $\beta > 0$

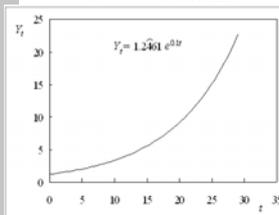
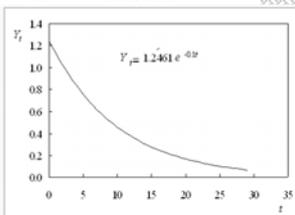


圖15.45 指數模型  $\beta < 0$



非線性模型

圖14.46 雙對數模型

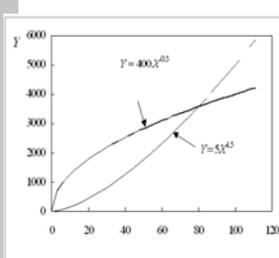
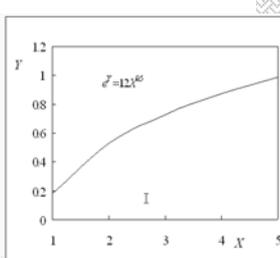
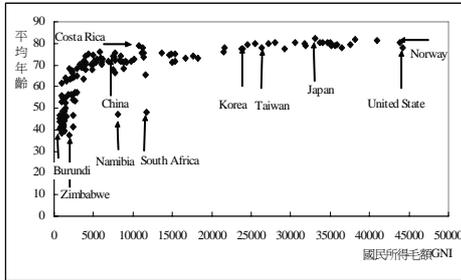


圖14.47 對數模型



非線性模型

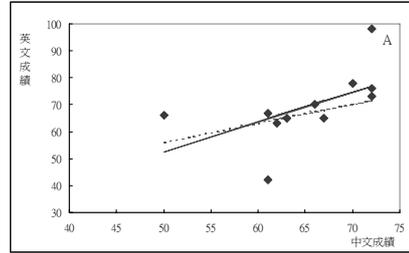
圖15.48 平均每人所得與平均預期壽命



林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

非線性模型

圖14.49 離群值



林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

非線性模型

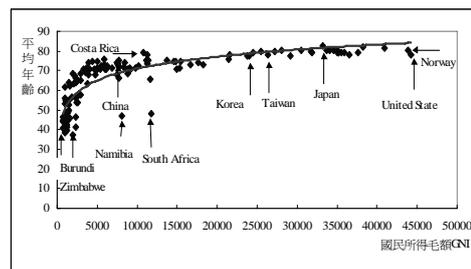
圖15.50 趨勢線選項對話方塊



林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

非線性模型

圖15.51 平均所得與預期壽命的關係



林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009