

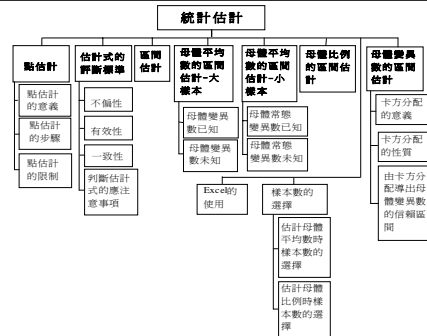
11 統計估計

學習目的

1. 瞭解點估計的意義、估計的步驟與限制。
2. 瞭解優良估計式的性質。
3. 瞭解區間估計的意義。
4. 瞭解大樣本與小樣本母體常態、變異數已知與未知下，單一母體平均數區間估計的方法。知悉 t 分配的意義與機率值。
5. 瞭解單一母體比例區間估計的方法。
6. 瞭解單一母體變異數區間估計的方法。瞭解卡方分配的意義與卡方值。
7. 瞭解區間估計的方法在經濟、政治、社會及企業管理方面的應用。
8. 利用 Excel 做統計估計。

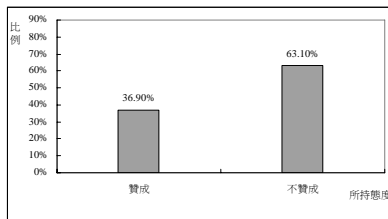
林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

本章結構



林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

圖11.1 贊成與不贊成吃飽的比例



林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

統計估計

○ 統計估計

統計估計是利用樣本統計量去推估母體參數的方法。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

點估計的意義與限制

○ 點估計

由母體抽取一組樣本數為 n 的隨機樣本，並以此得到的樣本統計量做為母體參數的估計值。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

點估計的意義與限制

○ 點估計的步驟

- ① 抽取具代表性的樣本
- ② 選擇一個較佳的樣本統計量做為估計式
- ③ 計算樣本統計量的值
- ④ 以樣本統計量的值推論母體參數值並做決策

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

點估計的意義與限制

表11.1 台北市區房屋的價格

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	700	1,520	542	840	820	854	1,280	1,490	1,388
2	856	850	928	950	1,100	960	980	956	690
3	720	790	698	1,323	848	810	998	1,050	1,080
4	835	850	821	923	753	869	860	799	930

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

點估計的意義與限制

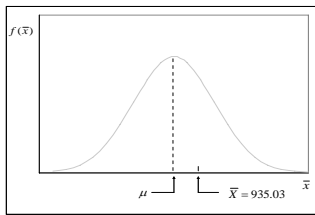
表11.2 台北市區的房屋價格

	A	B
1	台北市區房屋的價格	
2		
3	平均數	935.03
4	標準誤	37.21
5	標準差	223.25
6	變異數	49,840.48

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

點估計的意義與限制

圖11.2 台北市區房屋價格的估計



林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

估計式的評斷標準

○ 不偏性估計式

若估計式的平均數等於母體參數值，則該估計式為不偏估計式，否則為偏誤估計式。即若 $E(\hat{\theta} - \theta) = 0$ ，則 $\hat{\theta}$ 為 θ 的不偏估計式。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

估計式的評斷標準

圖11.3 不偏估計式

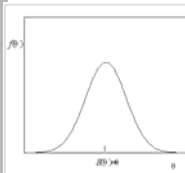


圖11.4 正偏誤估計

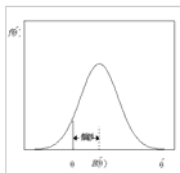
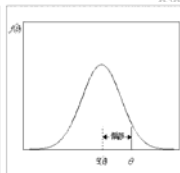


圖11.5 負偏誤估計



林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

估計式的評斷標準

表11.3 吃漢堡的機率分配 (母體)

x_i	$f(x_i)$
0	0.4
1	0.2
2	0.3
3	0.1

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

估計式的評斷標準

表11.4 吃漢堡的相對次數分配 (樣本)

x_i	相對次數 p_i
0	0.42
1	0.18
2	0.35
3	0.05

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

估計式的評斷標準

○ 相對有效性

設 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 均為 θ 的不偏誤估計式，若 $\hat{\theta}_1$ 的平均平方誤差相對 $\hat{\theta}_2$ 的平均平方誤差較小，即：

$$\frac{MSE(\hat{\theta}_1)}{MSE(\hat{\theta}_2)} < 1$$

則 $\hat{\theta}_1$ 相對 $\hat{\theta}_2$ 為有效估計式。

○ 不偏估計式的相對有效性

設 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 均為 θ 的不偏誤估計式，若

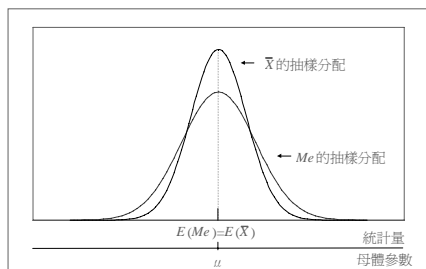
$$\frac{V(\hat{\theta}_1)}{V(\hat{\theta}_2)} < 1$$

則 $\hat{\theta}_1$ 相對 $\hat{\theta}_2$ 為有效估計式。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

估計式的評斷標準

圖11.6 \bar{X} 與 m_e 的相對有效性



林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

估計式的評斷標準

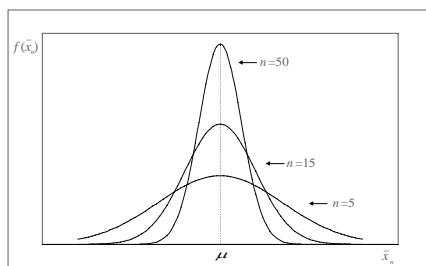
○ 一致性估計式

設 $\hat{\theta}_n$ 為樣本數 n 之 θ 的估計式，若 $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| < \epsilon) = 1$ ，則 $\hat{\theta}_n$ 為 θ 之一致性估計式。其中 ϵ 為正的極小數值。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

估計式的評斷標準

圖11.11 一致性估計式



林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

估計式的評斷標準

○ 一致性估計式的定理

若 $\hat{\theta}_n$ 為不偏誤估計式或漸近不偏估計式，且當 n 趨於無窮大時，其變異數趨近於零，即 $\lim_{n \rightarrow \infty} V(\hat{\theta}_n) = 0$ ，則 $\hat{\theta}_n$ 為 θ 之一致性估計式。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

第11章 統計估計 應用統計學 四版

估計式的評斷標準

○判斷估計式的應注意事項

- (1) 不偏性具平均的性質
- (2) 有效性
- (3) 一致性為大樣本的性質

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

第11章 統計估計 應用統計學 四版

區間估計的意義

○ 區間估計

對未知的母體參數估計出一個上下限的區間，並指出該區間包含母體參數的可靠度。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

第11章 統計估計 應用統計學 四版

區間估計的意義

○ 信賴區間

信賴區間是在一個既定的信賴水準下所構成的一個區間。是由樣本統計量及抽樣誤差所構成的一個(包含上限，下限的)區間。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

第11章 統計估計 應用統計學 四版

區間估計的意義

○ 信賴水準(信賴係數)

信賴水準是指信賴區間包含母體參數的信心(或稱可靠度，信賴度)。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

第11章 統計估計 應用統計學 四版

母體平均數的區間估計—大樣本

○ 大樣本變異數已知，母體平均數的信賴區間

信賴水準 $1-\alpha$ 下，以 \bar{X} 估計 μ 所得的信賴區間為：

$$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{X}}$$

$\bar{X} - Z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{X}}$ 稱為信賴區間下限， $\bar{X} + Z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{X}}$ 稱為信賴區間上限。

○ 大樣本變異數未知，母體平均數的信賴區間

$$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

第11章 統計估計 應用統計學 四版

區間估計的意義

圖11.12 一致性估計式

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

母體平均數的區間估計—大樣本

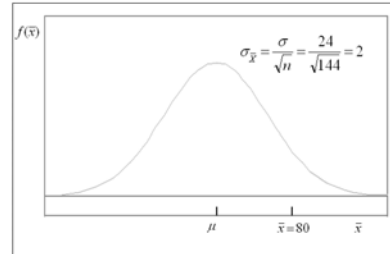
○ 區間估計的步驟

- ① 步驟1 選擇較佳的點估計式並計算點估計值
- ② 步驟2 取得樣本統計量的抽樣分配
- ③ 步驟3 導出母體參數的信賴區間
- ④ 步驟4 求出母體參數的信賴區間值並做統計推論

林嘉玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

母體平均數的區間估計—大樣本

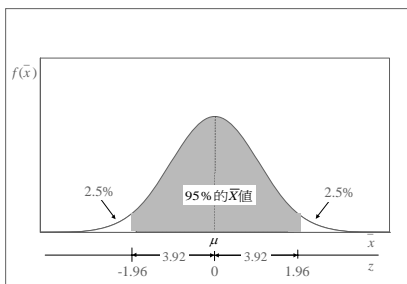
圖11.13 \bar{x} 的抽樣分配



林嘉玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

母體平均數的區間估計—大樣本

圖11.14 抽樣誤差小於等於1.96 $\sigma_{\bar{x}}$ 的區間



林嘉玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

母體平均數的區間估計—大樣本

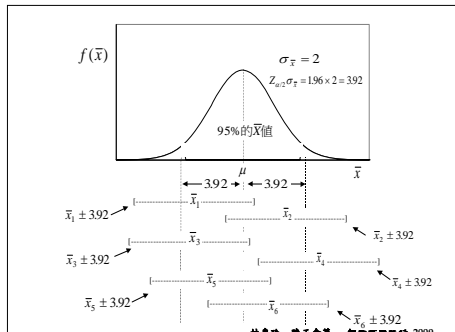
○ 95%信賴水準

95%信賴水準的含意是指，隨機抽取一組樣本所得的區間包含母體平均數的機率（或稱可靠度、信賴度）為0.95。或說區間不包含母體平均數的機率為0.05。

林嘉玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

母體平均數的區間估計—大樣本

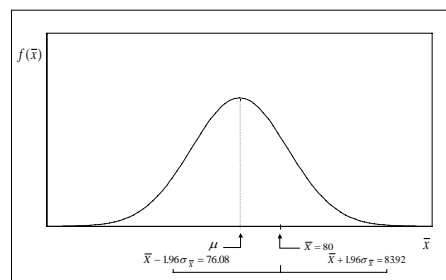
圖11.15 母體平均數 μ 的信賴區間



林嘉玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

母體平均數的區間估計—大樣本

圖11.11 母體平均數 μ 的信賴區間



林嘉玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

第11章 統計估計 應用統計學 四版

母體平均數的區間估計—大樣本

○ 信賴區間(大樣本, 母體變異數已知)

信賴水準 $1-\alpha$ 下, 以 \bar{X} 估計 μ 所得的信賴區間為:

$$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{X}}$$

$\bar{X} - Z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{X}}$ 稱為信賴區間下限, $\bar{X} + Z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{X}}$ 稱為信賴區間上限。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

第11章 統計估計 應用統計學 四版

母體平均數的區間估計—大樣本

表11.5 不同信賴水準下母體平均數的信賴區間

信賴水準 $1-\alpha$	α	$\alpha/2$	$Z_{\alpha/2}$	信賴區間 $\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{X}}$
0.90	0.10	0.05	1.645	$\bar{X} \pm 1.645 \sigma_{\bar{X}}$
0.95	0.05	0.025	1.96	$\bar{X} \pm 1.96 \sigma_{\bar{X}}$
0.99	0.01	0.005	2.575	$\bar{X} \pm 2.575 \sigma_{\bar{X}}$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

第11章 統計估計 應用統計學 四版

母體平均數的區間估計—大樣本

圖11.17 信賴區間對話方塊

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

第11章 統計估計 應用統計學 四版

母體平均數的區間估計—大樣本

圖11.18 青少年上網時間

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

第11章 統計估計 應用統計學 四版

母體平均數的區間估計—大樣本

○ 信賴區間長度的決定因素

- (1) 所選擇的點估計式的抽樣分配
- (2) 樣本數
- (3) 機率區間上下限的取法
- (4) 信賴係數

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

第11章 統計估計 應用統計學 四版

母體平均數的區間估計—大樣本

○ 大樣本變異數未知, 母體平均數的信賴區間

$$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

母體平均數的區間估計—大樣本

表11.6 台北市區房屋價格的估計

	A	B
1	台北市區房屋價格	
2		
3	平均數	935.03
4	標準差	37.21
5	標準差	223.25
6	變異數	49,840.48
7	個數	36
8	信賴度(95.0%)	75.54

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

母體平均數的區間估計—小樣本

○ 小樣本常態母體變異數已知，母體平均數的信賴區間

$$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

母體平均數的區間估計—小樣本

○ t 分配

自常態母體 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 隨機抽取樣本 (X_1, X_2, \dots, X_n) ，則統計量

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

為自由度 $n-1$ 的 t 分配。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

母體平均數的區間估計—小樣本

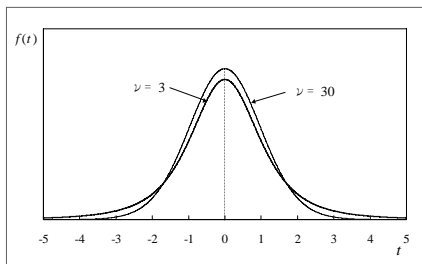
○ t 分配的性質

- ① t 分配為一個以平均數0為中心的對稱分配，不同的自由度 ν 有不同的 t 分配。 ν 為 t 分配的惟一參數。
- ② t 分配不與橫軸相交，亦即 t 值的範圍在 $(-\infty, \infty)$ 之間。 t 分配曲線比標準常態曲線為平坦，亦即分配曲線的高度較低，分散程度較大。
- ③ t 分配的平均數與變異數為： $E(t) = 0$ ， $V(t) = \frac{\nu}{\nu-2}$
- ④ 自由度趨近於無窮大時 ($\nu \rightarrow \infty$)， t 分配趨近於標準常態分配，即 $t \sim N(0,1)$ 。一般若 $\nu \geq 30$ ，則以標準常態分配代替 t 分配。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

母體平均數的區間估計—小樣本

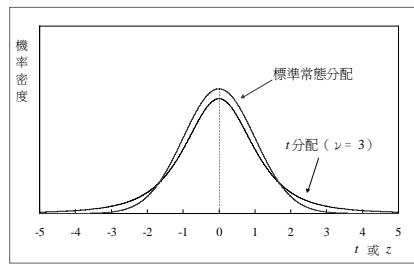
圖11.19 t 分配為以0為中心的對稱分配



林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

母體平均數的區間估計—小樣本

圖11.20 標準常態分配與 t 分配



林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

母體平均數的區間估計—小樣本

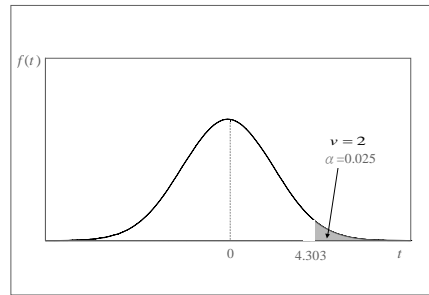
表11.7 t值表 (部份)

df	$t_{0.10}$	$t_{0.05}$	$t_{0.025}$	$t_{0.010}$	$t_{0.005}$	df
1	3.078	6.314	10.706	31.821	63.657	1
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	2
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	3
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	4
5	1.473	2.015	2.571	3.365	4.032	5
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	6
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.449	7
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	8
...
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	27
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	28
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	29
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	∞

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

母體平均數的區間估計—小樣本

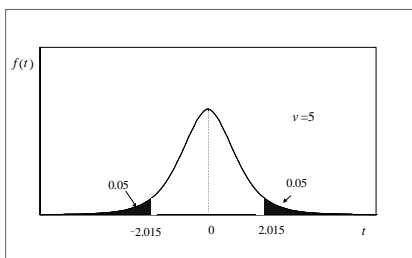
圖11.21 t值



林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

母體平均數的區間估計—小樣本

圖11.22 t分配的機率值



林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

母體平均數的區間估計—小樣本

圖11.23 t分配的對話方塊



林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

母體平均數的區間估計—小樣本

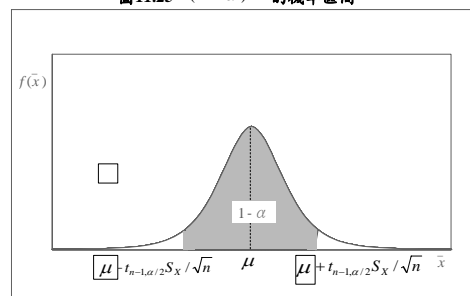
圖11.24 t值的對話方塊



林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

母體平均數的區間估計—小樣本

圖11.25 $(1 - \alpha)\bar{X}$ 的機率區間



林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

第11章 統計估計 應用統計學 四版

母體平均數的區間估計—小樣本

○ 小樣本常態母體變異數未知，母體平均數的信賴區間

$$\bar{X} \pm t_{n-1, \alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

第11章 統計估計 應用統計學 四版

母體比例的區間估計

表11.8 通過時間的敘述統計

	A	B
1	穿越馬路的通行時間	
2		
3	平均數	102.2222
4	標準差	3.4310
5	標準差	10.2929
6	變異數	105.9444
7	偏數	9
8	信賴度(95.0%)	7.9118

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

第11章 統計估計 應用統計學 四版

母體比例的區間估計

○ 大樣本母體比例的信賴區間

$$\hat{p} \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

第11章 統計估計 應用統計學 四版

母體比例的區間估計

圖11.26 $(1 - \alpha)\hat{p}$ 的機率區間

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

第11章 統計估計 應用統計學 四版

母體比例的區間估計

○ 大樣本母體比例的信賴區間 (常用公式)

$$\hat{p} \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{1}{4n}}$$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

第11章 統計估計 應用統計學 四版

樣本數的選擇—估計母體平均數時

○ 估計誤差不超過 d 值

$$\bar{X} - \mu = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq d$$

○ 估計母體平均數時的樣本數

$$n \geq \frac{Z_{\alpha/2}^2 \sigma^2}{d^2}$$

○ 估計母體平均數時的樣本數(母體變異數未知)

$$n \geq \frac{Z_{\alpha/2}^2 S^2}{d^2}$$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

樣本數的選擇—估計母體比例時

○ 估計母體比例時的樣本數

$$n \geq \frac{Z_{\alpha/2}^2 \hat{p}\hat{q}}{d^2}$$

○ 估計母體比例時的樣本數(保守估計)

$$n \geq \frac{Z_{\alpha/2}^2 (0.25)}{d^2}$$

母體變異數的區間估計

○ 樣本變異數

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

○ 卡方統計量

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2}$$

該統計量為自由度 $(n-1)$ 的卡方分配

母體變異數的區間估計

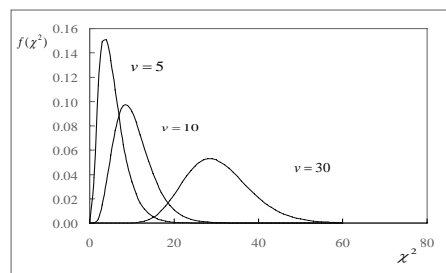
○ 卡方分配的性質

- ① 卡方分配為一定義在大於等於0(正數)範圍的右偏分配，不同的自由度決定不同的卡方分配。
- ② 卡方分配只有一個參數即自由度，表為 v 。卡方分配的平均數與變異數為：

$$E(\chi^2) = v, V(\chi^2) = 2v$$
- ③ 卡方分配當自由度增加而逐漸對稱，當自由度趨近於無窮大時($v \rightarrow \infty$)，卡方分配會趨近於常態分配。
- ④ 設 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，令 $Z^2 = (\frac{X-\mu}{\sigma})^2$ ，則 Z^2 為自由度1的卡方分配。

母體變異數的區間估計

圖11.27 卡方分配



母體變異數的區間估計

表11.9 卡方值

df	$\chi_{0.995}^2$	$\chi_{0.95}^2$	$\chi_{0.90}^2$	$\chi_{0.80}^2$	$\chi_{0.70}^2$	$\chi_{0.60}^2$	$\chi_{0.50}^2$	df
1	0.000393	0.003921	0.157908	2.70554	3.84146	7.87944	1	
2	0.100251	1.02587	2.10720	4.60517	5.99147	10.5966	2	
3	0.171212	3.51846	5.84375	6.25139	7.81473	12.8381	3	
4	2.06990	7.10721	1.063623	7.77944	9.48773	14.8602	4	
5	4.11740	1.145476	1.61031	9.23635	10.0705	16.7496	5	
6	6.75727	1.63539	2.20413	10.6446	12.5916	18.5476	6	
...	
17	5.69724	8.67176	10.0852	24.7690	27.5871	35.7185	17	
18	6.26481	9.39046	10.8649	25.9894	28.8693	37.1564	18	
19	6.84398	10.1170	10.6509	27.2036	30.1435	38.5822	19	
20	7.43386	10.8508	12.4426	28.4120	31.4104	39.9968	20	
...	

資料來源：擷錄自附表六。

母體變異數的區間估計

圖11.28 卡方分配機率值

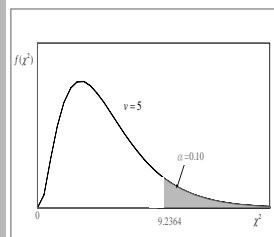
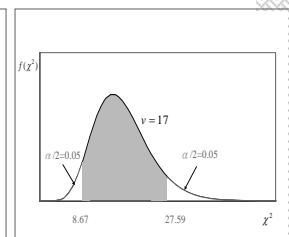


圖11.29 卡方值的機率區間



母體變異數的區間估計

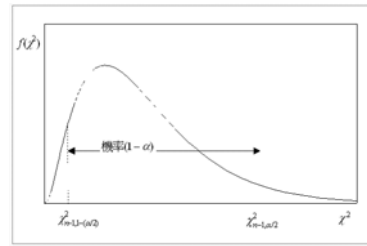
圖 11.30 卡方值的對話方塊



林惠玲 陳正壽著 雙葉書局發行 2009

母體變異數的區間估計

圖 11.31 $(1-\alpha) \chi^2$ 值的機率區間



林惠玲 陳正壽著 雙葉書局發行 2009

母體變異數的區間估計

○ 母體變異數的信賴區間

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1, \alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1, 1-\alpha/2}}$$

林惠玲 陳正壽著 雙葉書局發行 2009