Sequences (數列)

$\lim_{n\to\infty} a_n = L$ exists provided that for any given $\varepsilon > 0$, there exists $N \in \mathbb{N}$ such that

$$|a_n - L| < \varepsilon \text{ for all } n > N$$

即, a_n 和收斂值 L 的差距 要多小就可以有多小, 只要 n 足夠大。

判別數列收斂的技巧

- If $a_n \nearrow$ and $\{a_n\}$ is bounded above
If $a_n \nearrow$ and $\{a_n\}$ is bounded above , then $\{a_n\}$ converges.
If $a_n \nearrow$ xor $\searrow$ and $\{a_n\}$ is bounded

- Let $f(x)$ be an arbitrary function and define $a_n := f(n)$ for $n \in \mathbb{N}$. Then,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} a_n = L$$

  這樣做才能 在可化成 "$\frac{0}{0}$ form" 或 "$\frac{\infty}{\infty}$ form" 的情況時 運用 L'Hôpital Rule 以方便求出 $\lim_{x\to\infty} f(x)$。

- 若數列是以遞迴方式定義, 不論能否求得其 closed form, 先寫出幾項來觀察, 但不一定能夠就此斷言收斂與否。
  一定要在確定收斂的情況下 (假設 a_n 的收斂值爲 L), 才可從 遞迴定義式中 假設發生在 $n \to \infty$ 時的情況 (將式中所有 $a_n, a_{n+1}, \cdots$ 以 L 取代) 便可求出收斂值。

Series (級數)

令 n-sum $s_n := \sum_{i=1}^{n} a_i$, 定義 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} s_n$. 所以 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ 只是形式表示, 不一定存在.

判別級數收斂的技巧

- n^{th}-Term Test : If $\sum a_n$ converges, then $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (這是任何無窮級數收斂的必要條件!)
  — 欲知 $\sum_n a_n$ 收斂與否, 先看 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 是否爲 0, 如果$= 0$, 才繼續用其他判別法, 以免徒勞無功。

- 重複上一點, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂, 則 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$; 意即: a_n 在 n 很大的時候 有下降至0 的趨勢。假設$f(x)$ 在 $[1,\infty)$ 上連續 且≥ 0, 若 $a_n := f(n)$, 即使 f 不是單調遞減, 只要存在一個正整數M 使得 $f(x)\searrow 0$ for $x > M$, 則, 用 *integral test* 來看:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{\sum_{n=1}^{M-1} a_n}_{\text{有限項的和}, <\infty} + \sum_{n=M}^{\infty} a_n \text{ 收斂與否,} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=M}^{\infty} a_n \text{ 收斂與否,}$$

$$\Updownarrow$$

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\int_1^{M} f(x)\,dx}_{\substack{<\infty \\ \because f \text{ 在 } [1,\infty) \text{ 上連續}}} + \int_M^{\infty} f(x)\,dx \text{ 收斂與否,} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_M^{\infty} f(x)\,dx \text{ 收斂與否,}$$

故, 欲判別一 正無窮級數 收斂與否, 根本無須理會 前有限項的和。(不論M有多大, $\sum_{n=*}^{\infty} a_n$ 的項數 (無窮多項) 視爲“九牛”, $\sum_{n=1}^{M-1} a_n$ 的項數 ($M-1$項) 視爲“一毛”)

- 正級數 ($\sum_n a_n$, $\sum_n b_n$, $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0\,\forall n$) 審斂法 之補充說明

  1. *Integral Test* : $a_n := f(n)$, $f(x) \geq 0$ and continuous on $[k, \infty)$. Then,
     $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ converges $\iff$ $\int_k^{\infty} f(x)\,dx$ converges.
  2. *p-series test* : If $p > 1$, then $\sum_n \frac{1}{n^p}$ converges;
     If $p \leq 1$, then $\sum_n \frac{1}{n^p}$ diverges;
  3. *Ordinary Comparision Test* : $0 \leq a_n \leq b_n$ for all n. Then,
     $\sum b_n$ converges $\Longrightarrow$ $\sum a_n$ converges, i.e. $\sum a_n$ diverges $\Longrightarrow$ $\sum b_n$ diverges.
  4. *Limit Comparision Test* : Let $r = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$. 意思是, 在 n 超過某很大的 M 之後, a_n 大約是 b_n 的 r倍。
     所以 $\displaystyle\sum_{n=M}^{\infty} a_n \approx \sum_{n=M}^{\infty} r \cdot b_n = r \cdot \sum_{n=M}^{\infty} b_n$.
  5. *Ratio Test* : let $r = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. 意思是, 在 n 超過某個很大的 M 之後, a_{n+1} 大約是 a_n 的 r倍。
     所以 $\displaystyle\sum_{n=M}^{\infty} a_n \approx a_M + a_M r + a_M r^2 + a_M r^3 + \cdots = a_M \sum_{n=0}^{\infty} r^n$.
  6. *Root Test* : let $r = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. 意思是, 在 n 超過某個很大的 M 之後, a_n 大約是 r^n。
     所以 $\displaystyle\sum_{n=M}^{\infty} a_n \approx \sum_{n=M}^{\infty} r^n$.

  Ratio Test 和 Root Test 都是從 **幾何級數** 的角度來探討的, 應該不難理解才是 (使用時機通常爲: a_{n+1} 比 a_n 多 (個數) 乘了帶有 n 的東西)。

- (關於非正級數)

  1. 對於任何級數, 絕對收斂則收斂。即: 若正級數 $\sum_n |a_n|$ 收斂, 則正級數 $\sum_n (a_n + |a_n|)$ 收斂 (因爲 $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$), 所以 $\sum_n a_n$ 等於 $\sum_n (a_n + |a_n|) - \sum_n |a_n|$, 收斂。絕對不會有 “$\sum_n |a_n|$ 收斂 而 $\sum_n a_n$ 發散” 的情況。
  2. 交錯級數本身收不收斂是很容易判別的 (由 n^{th}-term test)。不過它有可能是 條件收斂, 也有可能是 絕對收斂。
     絕對收斂的級數, 無論是對 $\sum_n |a_n|$ 或 $\sum_n a_n$ 而言, 即使任意調換各項的順序 也不會影響其收斂值。
     但我們不知道 不受重排影響 的級數 還有哪些, 至少 條件收斂的級數 就不能隨便重排。
  3. 欲知一級數是否爲 絕對收斂, 只須將諸 正級數審斂法 中 之數列 加上絕對值 即可。

Power Series (冪級數)

- 無論 $f(x)$ 是否爲多項式, 令 $f_0(x) := f(x)$, 我們可以定義 $f_{n+1}(x) := \frac{f_n(x) - f_n(a)}{x-a}$, $x \neq a$, 即 $f_n(x) = f_n(a) + f_{n+1}(x)(x-a)$, $x \neq a$。如果一直不斷地這麼“除下去”, 就會得到

$$
\begin{aligned}
f(x) = f_0(x) &= f_0(a) + f_1(x)(x-a) \\
&= f_0(a) + f_1(a)(x-a) + f_2(x)(x-a)^2 \\
&= f_0(a) + f_1(a)(x-a) + f_2(a)(x-a)^2 + f_3(x)(x-a)^3 \\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

所以現在就得問: $f_n(a)$ 這些數究竟是什麼。若 f_n 在 a 處可微, 則根據 L'Hôpital Rule, $f_{n+1}(a) := \lim_{x\to a} f_{n+1}(x) = \lim_{x\to a} \dfrac{f_n(x)-f_n(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} f_n'(x) = f_n'(a)$。因此,

若 $f_0(x)$ 在 a 處可微, 則 $f_1(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$;

若 $f_1(x)$ 在 a 處可微, 則 $f_2(a) = \lim_{x\to a} \frac{f_1(x)-f_1(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)}{x-a}$
$= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^2} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)-f'(a)}{2(x-a)}$
$= \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{2\cdot 1} = \frac{f''(a)}{2!}$, 條件其實就是 $f(x)$ 在 a 處是否 2 次可微。

類似地, 若 $f(x)$ 在 a 處 n 次可微, 則可以得到 $f_n(a) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$。

若 $f(x)$ 在 a 處無窮次可微, 則 $f(x)$ 形式上可寫成:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

等號右邊叫做 $f(x)$ 的 power series (冪級數) in $(x-a)$ 或 *Taylor expansion* of $f(x)$ about a($a=0$ 時又名 *Maclaurin series*), 收斂則等號成立, 視 x 而定。

- 了解前一點後, 可以換另一個較簡單的講法: 假設一個在 $x=a$ 處 **無窮可微**(infinitely differentiable) 的函數 $f(x)$ 的 power series in $(x-a)$ 爲

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots, \text{ converges for } x \in I$$

則, $f^{(n)}(x) = n(n-1)\cdots 2\cdot 1\, c_n + (n+1)n\cdots 3\cdot 2\, c_{n+1}(x-a) + (n+2)(n+1)\cdots 4\cdot 3\, c_{n+2}(x-a)^2 + \cdots$
$= n!\, c_n + \frac{(n+1)!}{1!}c_{n+1}(x-a)^1 + \frac{(n+2)!}{2!}c_{n+2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{(n+k)!}{k!}c_{n+k}(x-a)^k + \cdots,$

$\Longrightarrow f^{(n)}(a) = n!\, c_n$, 即 $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$。那麼 $f(x)$ 的 power series in $(x-a)$ 便可改寫爲

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

- 一個 power series 只有在它 會收斂的情況下才有意義, 不論我們是否能找出它的 closed form。

- 一個已經有 closed form 的函數 $f(x)$, 有它自己的定義域 D_f。如果我們想要知道 在什麼情況下, 才能在 $f(x)$ 和它的 power series 之間 畫上等號, 就必須把 power series of $f(x)$ 的最大收斂域 ($\subseteq D_f$) 找出來。

- 求給定 power series 之收斂域(一定 非空, 並且連通)　注意假設二字

方法一 : 在假設 power series 絕對收斂 的前題下, 由 正級數審斂法 (如"ratio test") 得到。

方法二 : 直接找 power series 的 closed form, 從過程中的假設 附帶得到。

兩種做法都要檢驗收斂域的邊界點, 因爲 那兩點就是正級數審斂法中 "inconclusive" 的情況。所以任何一個 power series in $(x-a)$ 在微分、積分、或乘以 $(x-a)^n$ 後 的收斂域的內點依舊, 即 radius of convergence 相同。所以我們可以在一連串的 微分、積分、乘以 $(x-a)^n$ 後, 再檢驗收斂域的邊界點即可。但是, 兩個不同 power series 一定要在它們收斂域交集非空時才可以進行兩者之間的運算, 兩收斂域交集即爲新的收斂域。

- 兩個 power series 相除, 可 以**長除法**(Long Division) 逕求之, 亦可 以乘法解決:

令 $(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots) = \dfrac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots}$,
即 $(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots) = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)$,
— 乘開後, 等號兩邊 同次項的係數必定相等, 而解得 c_0、c_1、c_2、$\cdots$ 。

- 常見的 Maclaurin 級數:

$$
\begin{array}{lll}
\ln(1+x) & = \frac{x^1}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots & \text{從 } \int \frac{dx}{1+x} + C \text{ 而來} \\
\arctan x & = \frac{x^1}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots & \text{從 } \int \frac{dx}{1+x^2} + C \text{ 而來} \\
\sin x & = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots & \qquad (1) \\
\Longrightarrow \cos x & = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots & \text{從 } \frac{d}{dx}\sin x \text{ 而來} \quad (2) \\
e^x & = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots & \qquad (3) \\
\Longrightarrow \sinh x & = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots & \text{從 } \sinh x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ 而來} \\
\Longrightarrow \cosh x & = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots & \text{從 } \cosh x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ 而來}
\end{array}
$$

由 (1)(2)(3) 看出以前提過的 *Euler's formula*: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$,
$i \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{-1}$。

- 我們以前推導過 $\ln(1+x)$, $\arctan x$ 的 derivatives, 故意不寫 " $\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t}$ ", 或 " $\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ " 來說明或定義, 就是怕你們犯了 " $f(x) \stackrel{\text{錯!}}{=} \int_a^x \frac{d}{dt} f(t)\,dt = f(x) - f(a)$ " 的錯誤 (等號只有在 $f(a) = 0$ 的情況下才成立)。例如, 上列之 $\cos x$, 我們也可由 $\cos x = -\int \sin x + C$ 而得之:

$$\cos x = -\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{3!4} + \frac{x^6}{5!6} - \frac{x^8}{7!8} + \cdots\right) + C, \quad \stackrel{\text{令 } x=0}{\Longrightarrow} \text{ 必定得到 } C = 1.$$

用 $\cos x = -\int_a^x \sin t\,dt$ 來寫的話, a 絕對不是 0, 而應該是 $\frac{\pi}{2}$ 的奇數倍。千萬不要以為 a 總是 0。

如果, $\frac{d}{dx} f(x)$ 可以輕易地以 power series 表出, 則 $f(x) = \int \frac{d}{dx} f(x)\, dx + C$ 的 power series: $\frac{d}{dx} f(x)$ 用 power series 表示後, 積分, 而後代入某 $x = a$ 而得常數 C。

- 若 $f(x)$ 為 $n+1$ 次可微, 則

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{f \text{ 對 } a \text{ 展開到 } n\text{次}} + \underbrace{f_{n+1}(x)(x-a)^{n+1}}_{\text{尾項 } R_n(x)}$$

定義 $g(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k}_{f \text{ 對 } t \text{ 展開到 } n\text{次}} - R_n(x)\frac{(x-t)^{n+1}}{(x-a)^{n+1}}$, 則 $g(t)$ 在 x 和 a 之間連續可微, 且 $g(x) = 0 = g(a)$. 則根據 Rolle's Theorem (見上學期筆記), 存在 ξ 在 x 和 a 之間, 使得 $g'(\xi) = 0$, i.e.

$$0 = \left[\frac{d}{dt} g(t)\right]_{t=\xi} = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{k!} k (x-t)^{k-1} + R_n(x)\frac{(n+1)(x-t)^n}{(x-a)^{n+1}}\right]_{t=\xi}$$

$$= \left[-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + (n+1)R_n(x)\frac{(x-t)^n}{(x-a)^{n+1}}\right]_{t=\xi}.$$

所以尾項, 也就是所謂的誤差項 $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$. (注意喔, 現在只有有限項, 沒有什麼收不收斂的)

如果 f 在某 x 點等於它在 a 的 power series, 即 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, 這和 power series 收斂是同一回事.

- **二項式展開** (Binomial Expansion) 的推廣

令 $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. For $p \in \mathbb{Z}_+$, $\binom{p}{k} := \frac{p!}{p!(p-k)!} = \frac{p\cdot(p-1)}{k\cdot(k-1)} \frac{\cdots}{\cdots} \frac{(p-k+2)\cdot(p-k+1)}{2 \quad\cdot\quad 1} = \frac{p(p-1)\cdots(p-k+2)(p-k+1)}{k!}$;

但是對於非正整數的 p 而言,$\binom{p}{k} := \frac{p!}{k!(p-k)!}$ 裡頭的 $p!$ 和 $(p-k)!$ 是沒有意義的。所以我們以後將不再用 $\frac{p!}{k!(p-k)!}$, 而改以$\frac{p(p-1)\cdots(p-r+2)(p-r+1)}{k!}$ 來定義 $\binom{p}{k}$, $p \in \mathbb{R}$:

$$\binom{p}{k} := \frac{p(p-1)\cdots(p-k+2)(p-k+1)}{k!}.$$

$$\begin{array}{lll}
\text{令} & f(x) := (1+x)^p, & f(0) = 1, \\
\Longrightarrow & f'(x) = p(1+x)^{p-1}, & f'(0) = p, \\
\Longrightarrow & f''(x) = p(p-1)(1+x)^{p-2}, & f''(0) = p(p-1), \\
 & \cdots\cdots\cdots & \\
\Longrightarrow & f^{(k)} = p(p-1)\cdots(p-k+1)(1+x)^{p-k}, & f^{(k)}(0) = p(p-1)\cdots(p-k+1).
\end{array}$$

則, $f(x)$ 的 Maclaurin 展開 爲

$$\begin{array}{lll}
 & f(x) & = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots \\
 & & = 1 + \frac{p}{1!}x^1 + \frac{p(p-1)}{2!}x^1 + \cdots \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}x^k + \cdots \\
\text{i.e.} & (1+x)^p & = \binom{p}{0} + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \cdots + \binom{p}{k}x^k + \cdots\cdots \\
 & & \\
\Longrightarrow & (a+x)^p & = a^p(1+\frac{x}{a})^p \\
 & & = a^p\left[\binom{p}{0} + \binom{p}{1}(\frac{x}{a}) + \binom{p}{2}(\frac{x}{a})^2 + \cdots + \binom{p}{k}(\frac{x}{a})^k + \cdots\cdots\right] \\
 & & = \binom{p}{0}a^p + \binom{p}{1}a^{p-1}x + \binom{p}{2}a^{p-2}x^2 + \cdots + \binom{p}{k}a^{p-k}x^k + \cdots\cdots,
\end{array}$$

不必擔心 $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 的情況。因爲按照 $\binom{p}{k}$ 的定義,$\binom{p}{k} = 0$ for $k > p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$。所以 $\binom{p}{k}$ 還是只有 $p+1$ 項, 和你們以前熟知的二項式展開一樣。

- 令 $f(x)$ 是一個 n 次**多項式**(polynomial of degree n)。則它的 Maclaurin 展開 即是其本身; 並且, 其**對任意** $a \neq 0$ **之展開**(Taylor series in $x-a$), 可由**綜合除法**(Synthetic Division) 輕易達成。很淸楚地, 因爲$f^{(k)}(x) \equiv 0$ for $k > n$, 不論是 Maclaurin 或 Taylor 展開, 頂多有 $n+1$ 項 :

$$\begin{array}{ll}
f(x) & := c_0 + c_1x^1 + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n \\
 & = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\
 & \quad \text{(如果被問到 } f^{(k)}(0)\text{等於多少, 該不會眞的對 } f(x) \text{ 求導 } k \text{ 次吧?)} \\
 & = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n
\end{array}$$