Parametric Equations (參數式)

如果 (x,y) 隨 t 的變化而改變位置 (自由度=1), 即 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, 則當 t 變化時, (x,y) 會掃出一維曲線 $\mathcal{C}$, $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ 稱爲 "$\mathcal{C}$ 的參數式", 變量 t 稱爲參數。假使 方程式 $f(x,y)=0$ 充分代表曲線 $\mathcal{C}$, 則, 根據 方程式 $f(x,y)=0$ 找到一個 $\mathcal{C}$ 的參數式 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ 稱爲 "將 $\mathcal{C}$ 參數化"。

Example 1 $\mathcal{C} : x^2+y^2=1$, 則 $(x,y)=(\cos\theta,\sin\theta)$ 是 $\mathcal{C}$ 的參數式, 以 θ 爲參數。雖然形式不同於前, $(x,y)=(\sin\zeta,\cos\zeta)$ 同樣也是 $\mathcal{C}$ 的參數式, 以 ζ 爲參數。

參數化的方法可能不只一種, 有時甚至非常難找、甚至可能找不到。

Example 2 先有 $\mathcal{C}$ 的參數式 $\begin{cases} x = 3+2t^2 \\ y = 4-t^3 \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$, 問: 是否存在 描述 x,y 關係、僅含 x,y 的方程式?

原參數式 即 $\begin{cases} \frac{x-3}{2} = t^2, \\ 4-y = t^3, \end{cases}$ $\Longrightarrow (\frac{x-3}{2})^3 = (4-y)^2$, 即 $x^3-9x^2+64y^2+27x-8y-155=0$ 。

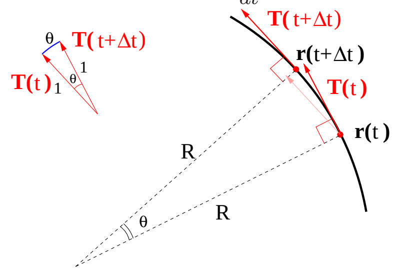
"參數式 $\Longrightarrow$ 方程式?" 不一定好做 (特別是多個參數時) , 反之, "方程式 $\Longrightarrow$ 參數式?" 不必然只有一參數式。

參數曲線最常見的問題就是求 **弧長** 或 **曲率/曲率半徑**。令 $\mathbf{r}(t)$ 爲 $\mathbb{R}^n$ 中一參數曲線, 以 $s=s(t)$ 表示從某定點 t_0 開始算到 t 的弧長。則微弧長 $ds = \|d(\mathbf{r}(t))\| = \|\dot{\mathbf{r}}\|\,dt$, 即 $\frac{ds}{dt} = \|\dot{\mathbf{r}}\|$。則弧長

$$s(\tau) = \int_{t_0}^{\tau} ds(t) = \int_{t_0}^{\tau} \|\dot{\mathbf{r}}(t)\|\,dt$$

已經講過很多次了, 當 $\mathbf{r}(t) = (x(t),y(t)) \in \mathbb{R}^2$ 時, $ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = \|\dot{\mathbf{r}}\|\,dt$, $\|\dot{\mathbf{r}}\| = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$。

定義 $\mathbf{T}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|}$ 爲在 t 的 單位切向量, 則 $\mathbf{T} = \dfrac{\dot{\mathbf{r}}}{\|\dot{\mathbf{r}}\|} = \dfrac{\frac{d\mathbf{r}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$。



權且將 t 解釋成時間。$\mathbf{r}(t)$ 上一點在很短的 Δt 時間內移動 (從 t 到 $t+\Delta t$, 間隔 $\Delta t \approx 0$) 並且將此點移動的軌跡 看做 好像是 一個 以 R 爲半徑掃過 θ 角 ($\theta\approx 0$) 而成的弧線 (記得 R、θ 是虛構的), 則 弧長 $R\theta \approx \|\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)\|$。由於 $\mathbf{T}$ 是 **單位切向量**, $\therefore \|\mathbf{T}(t+\Delta t)-\mathbf{T}(t)\| \approx \theta$。因此, 當 $\Delta t \rightsquigarrow 0$, 在此瞬時間的半徑

$$R \approx \frac{\|\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)\|}{\|\mathbf{T}(t+\Delta t)-\mathbf{T}(t)\|} = \frac{\left\|\frac{\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)}{\Delta t}\right\|}{\left\|\frac{\mathbf{T}(t+\Delta t)-\mathbf{T}(t)}{\Delta t}\right\|} \xrightarrow{\Delta t\to 0} \frac{\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|}{\left\|\dot{\mathbf{T}}(t)\right\|},$$

簡言之, 當 $\Delta t\to 0$, $\Longrightarrow R\theta \approx \|d\mathbf{r}\|$, $\theta \approx \|d\mathbf{T}\|$,

$$\Longrightarrow R \approx \frac{\|d\mathbf{r}\|}{\|d\mathbf{T}\|} = \frac{ds}{\|d\mathbf{T}\|} = \frac{1}{\left\|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right\|} \quad (\because \|d\mathbf{r}\| = ds)$$

$$= \quad \frac{\|d\mathbf{r}\|/dt}{\|d\mathbf{T}\|/dt} = \frac{\left\|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right\|}{\left\|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right\|} = \frac{\|\dot{\mathbf{r}}\|}{\left\|\dot{\mathbf{T}}\right\|}$$

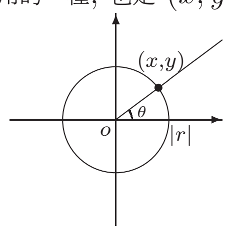
定義曲率 $\kappa \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{1}{R}$, R 稱爲曲率半徑, 則

$$\kappa = \frac{\left\|\dot{\mathbf{T}}(t)\right\|}{\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|} = \frac{\left\|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right\|}{\left\|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right\|} = \left\|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right\|.$$

這裡 位置 $\mathbf{r}$、單位切向量 $\mathbf{T}$ 在求導時刻意使用不同的參數, 是爲了讓你們了解: 不僅僅是參數式, 表達方式不同, 就會有不同的方便性、不同的效果。例如, 單位切向量 $\mathbf{T}$ 原是以時間爲參數, 若能以弧長 s 重新表達, 則 $\mathbf{T}$ 直接對 s 求導後 求長度 即可得曲率 κ。再例如, $\mathbf{r}(\xi) = (\cos\xi, \sin\xi)$ 在單位圓上跑, 參數 ξ 可說成是 到原點和 x-軸的夾角 也可說成是 由 x-軸 開始算起的弧長。再例如, $\mathbf{r}(\xi) = (3\cos\theta, 3\sin\theta)$ 在半徑爲 3 的圓上跑, 參數 θ 可說成是 到原點和 x-軸的夾角。$\mathbf{r}(s) = (3\cos\frac{s}{3}, 3\sin\frac{s}{3})$ 也是在半徑爲 3 的圓上跑, 參數 s 可說成是 由 x-軸 開始算起的弧長。不過這兩個參數式根本就是同一個。

Polar Coordinates (極座標)

極座標 是 除直角座標外, 描述 ”點在二維空間的位置” 各方式中最常用的一種, 也是 (x,y) 的參數式。一個點可以用不同的方式來記。這兩種記法可以互相轉換: 直角座標 (x,y) $\xleftrightarrow{\left\{\begin{smallmatrix} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta\end{smallmatrix}\right.}$ 極座標 (r,θ)



Basics

k,n 爲任意整數, 則 (r,θ) 和 $(r,\theta+2k\pi)$ 是同一點,
(r,θ) 和 $(r,\theta+{\scriptstyle(2n-1)}\pi)$ 對稱於原點,
(r,θ) 和 $(-r,\theta)$ 對稱於原點,
$(-r,\theta)$ 和 $(r,\theta+{\scriptstyle(2n-1)}\pi)$ 是同一點,
(r,θ) 和 $(r,-\theta)$ 對稱於 $\theta=0$,
(r,θ) 和 $(r,\frac{\pi}{2}-\theta)$ 對稱於 $\theta=\frac{\pi}{4}$,
$\theta=\alpha$ 和 $\theta=\alpha+k\pi$ 是同一條線,
$\cdots\cdots$

Some Rigid Transforms

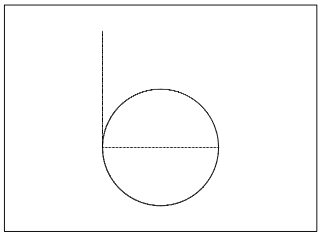
若 極座標曲線 $\mathcal{C}: r=f(\theta)$, 則 $r=f(-\theta)$ 和 $\mathcal{C}$ 對稱於 $\theta=0$,
$r=-f(\theta)$(即 $-r=f(\theta)$) 爲 $\mathcal{C}$ 對原點翻至對頭,
$r=f(\theta-\alpha)$ 爲 $\mathcal{C}$ 增加 α (對原點旋轉 α),
$\cdots\cdots$
這是上學期一開始就講過的東西 (見“函數”部份)。

若 $r=f(\theta)$, $\theta\in[\theta_0,\theta_1]$, 不重複, 則其掃過的面積爲 $\displaystyle\int_{\theta_0}^{\theta_1}\frac{1}{2}r^2\,d\theta$, 即 $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1}f^2(\theta)\,d\theta$, 弧長則爲 $\displaystyle\int_{\theta_0}^{\theta_1}ds = \int_{\theta_0}^{\theta_1}\sqrt{f^2(\theta)+f'(\theta)^2}\,d\theta$ 。$\left(\text{直觀: } ds_{(\theta)} = \sqrt{(rd\theta)^2+(dr)^2} = \sqrt{f^2(\theta)+f'(\theta)^2}\,d\theta\right)$

Example 3 描繪出 $\begin{cases} r=\cos(n\theta), \\ r\geq 0, \end{cases}$ 和 $\begin{cases} r=\sin(n\theta), \\ r\geq 0. \end{cases}$ 的參數曲線。(注意, 這裡要求 “$r \geq 0$”, 表示 只要看 “不掉頭” 的點。)

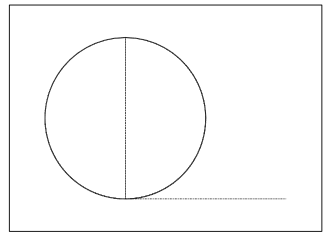
$$\begin{aligned} & r=\cos(n\theta) \\ \Leftrightarrow\ & r=\cos(-n\theta) \end{aligned} \quad \xrightarrow{\circlearrowleft \frac{\pi}{2n}} \quad \begin{aligned} & r=\cos\left(-n(\theta-\tfrac{\pi}{2n})\right) \\ \Leftrightarrow\ & r=\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-n\theta\right) \\ \Leftrightarrow\ & r=\sin(n\theta)\,, \end{aligned}$$

$n=1:$

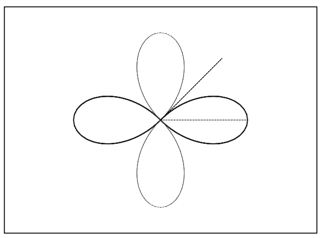


$\circlearrowleft \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\Leftarrow \frac{\pi}{2} \circlearrowright$

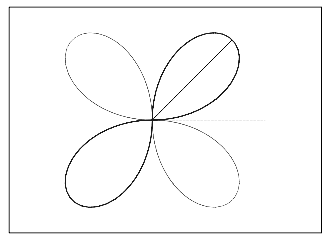


$n=2:$

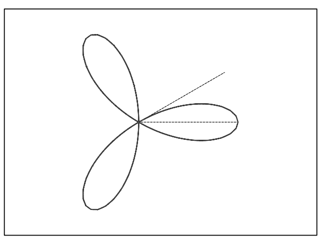


$\circlearrowleft \frac{\pi}{4} \Rightarrow$

$\Leftarrow \frac{\pi}{4} \circlearrowright$

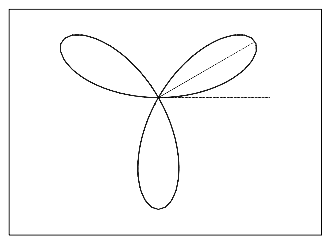


$n=3:$

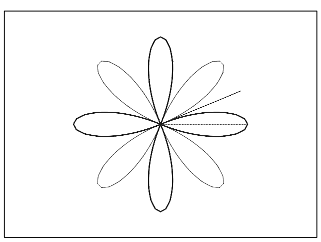


$\circlearrowleft \frac{\pi}{6} \Rightarrow$

$\Leftarrow \frac{\pi}{6} \circlearrowright$

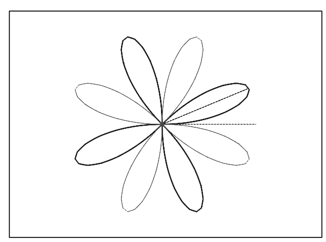


$n=4:$

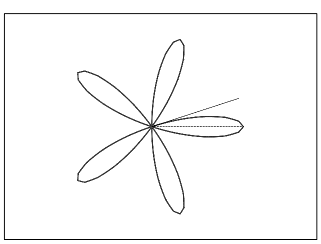


$\circlearrowleft \frac{\pi}{8} \Rightarrow$

$\Leftarrow \frac{\pi}{8} \circlearrowright$

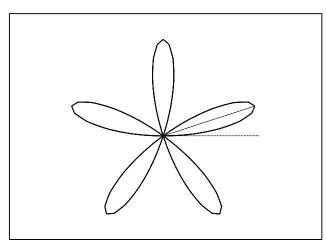


$n=5:$



$\circlearrowleft \frac{\pi}{10} \Rightarrow$

$\Leftarrow \frac{\pi}{10} \circlearrowright$



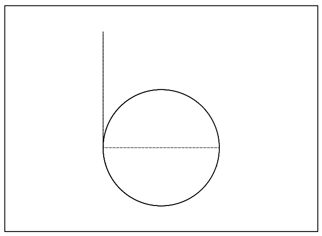
Example 4 描繪出 $r=\cos(\frac{\theta}{n})$ 和 $r=\sin(\frac{\theta}{n})$ 的參數曲線。

$$\begin{aligned} & r=\cos(\tfrac{\theta}{n}) \\ \Leftrightarrow\ & r=\cos(-\tfrac{\theta}{n}) \quad \xrightarrow{\circlearrowleft\ \frac{n\pi}{2}} \quad r=\cos\big(-(\theta-\tfrac{n\pi}{2})/n\big) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow\ r=\cos(\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{\theta}{n}) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow\ r=\sin(\tfrac{\theta}{n}), \end{aligned}$$

不過, $\frac{n\pi}{2}$ 可能繞了好幾圈, 等同於 只轉 $\frac{n\pi}{2}-\lfloor\frac{n}{4}\rfloor 2\pi$:

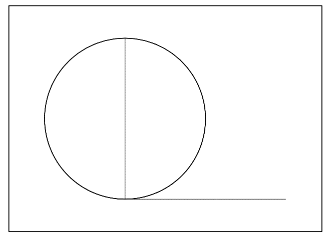
$$r=\cos(\tfrac{\theta}{n}) \quad \begin{array}{c} \circlearrowleft\ \frac{n\pi}{2}-\lfloor\frac{n}{4}\rfloor 2\pi \Rightarrow \\ \Leftarrow \frac{n\pi}{2}-\lfloor\frac{n}{4}\rfloor 2\pi\ \circlearrowright \end{array} \quad r=\sin(\tfrac{\theta}{n})$$

$n=1:$

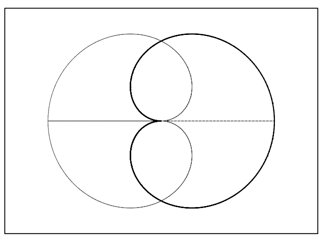


$\circlearrowleft\ \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\Leftarrow \frac{\pi}{2}\ \circlearrowright$

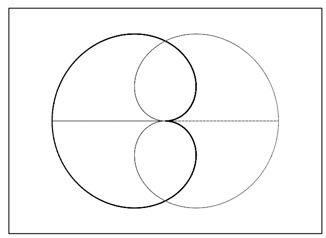


$n=2:$

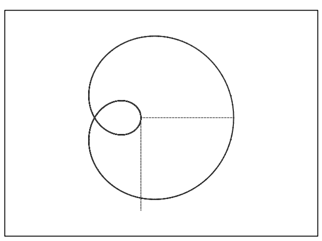


$\circlearrowleft\ \pi \Rightarrow$

$\Leftarrow \pi\ \circlearrowright$

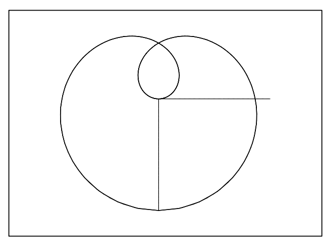


$n=3:$

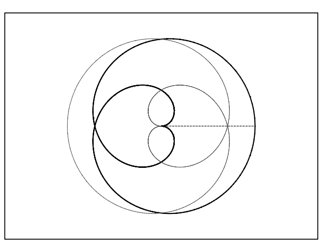


$\circlearrowleft\ \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$

$\Leftarrow \frac{3\pi}{2}\ \circlearrowright$

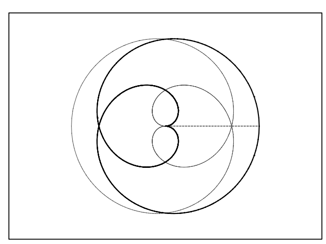


$n=4:$

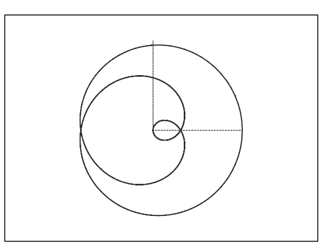


$\circlearrowleft\ 0 \Rightarrow$

$\Leftarrow 0\ \circlearrowright$

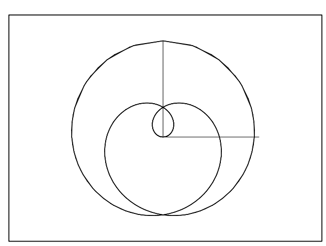


$n=5:$



$\circlearrowleft\ \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\Leftarrow \frac{\pi}{2}\ \circlearrowright$

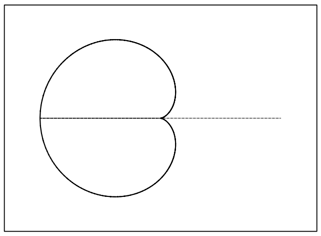


Example 5 描繪出 $r = 1 - \cos(n\theta)$ 和 $r = 1 - \sin(n\theta)$ 的參數曲線。注意 $r = 1 - \cos(n\theta)$ 恆正。

$$\begin{aligned} & r = 1 - \cos(n\theta) \\ \Leftrightarrow\ & r = 1 - \cos(-n\theta) \end{aligned} \quad \xrightarrow{\circlearrowleft \frac{\pi}{2n}} \quad \begin{aligned} & r = 1 - \cos\left(-n(\theta - \tfrac{\pi}{2n})\right) \\ \Leftrightarrow\ & r = 1 - \cos(\tfrac{\pi}{2} - n\theta) \\ \Leftrightarrow\ & r = 1 - \sin(n\theta)\,, \end{aligned}$$

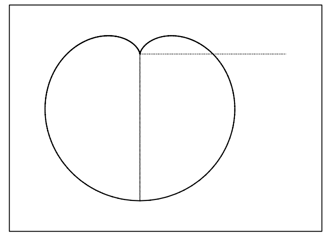
再者, $1 - \cos(n\theta) = 2\cos^2(\frac{n\theta}{2})$, 所以 $r = 1 - \cos(n\theta)$ 的形狀可由 $r = \cos(\frac{n\theta}{2})$ 看出大概。

$n = 1:$

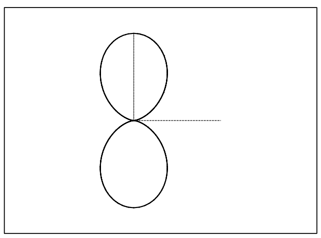


$\circlearrowleft \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\Leftarrow \frac{\pi}{2} \circlearrowright$

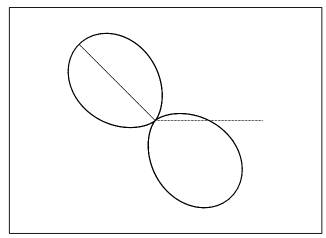


$n = 2:$

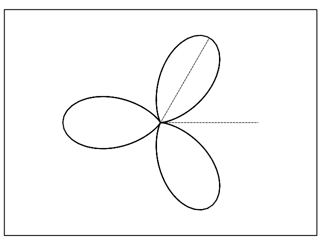


$\circlearrowleft \frac{\pi}{4} \Rightarrow$

$\Leftarrow \frac{\pi}{4} \circlearrowright$

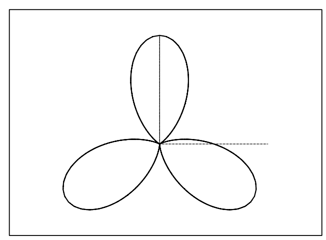


$n = 3:$

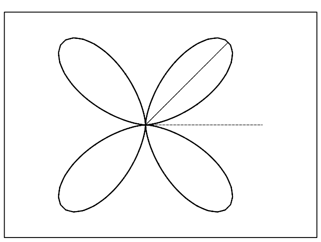


$\circlearrowleft \frac{\pi}{6} \Rightarrow$

$\Leftarrow \frac{\pi}{6} \circlearrowright$

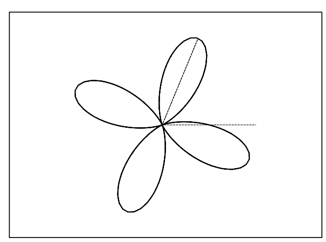


$n = 4:$

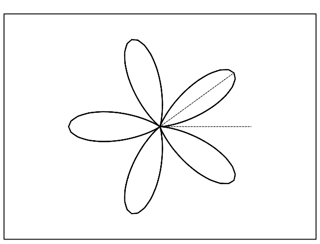


$\circlearrowleft \frac{\pi}{8} \Rightarrow$

$\Leftarrow \frac{\pi}{8} \circlearrowright$

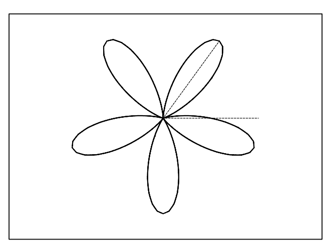


$n = 5:$



$\circlearrowleft \frac{\pi}{10} \Rightarrow$

$\Leftarrow \frac{\pi}{10} \circlearrowright$



所以, 此後既已畫 $\cos(*)$ 後就不再畫 $\sin(*)$ 了。

Example 6 $r = \frac{1}{1+e\cos(n\theta)}$, $e = 0.5,\ 1.0,\ 1.5,\ n = 1, \cdots, 5$ 的參數曲線如下: