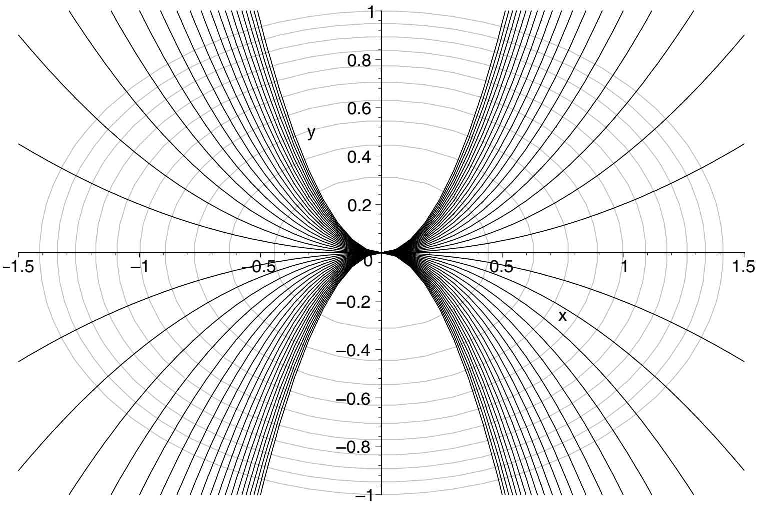
$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ 代表的是一個點的位置, 點的連續移動 就是所謂的軌跡。那麼, 在軌跡上的一點 位置的微變化量 $d(x, y) = (dx, dy)$ 就是指向切方向, 切記切記!

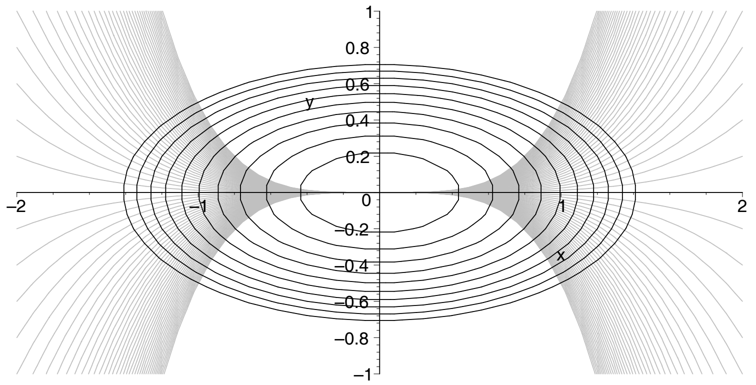
- 求: 與 曲線族 $\mathscr{A} : y = ax^2$, $a \in \mathbb{R}$ (拋物線族) 正交的 曲線族 $\mathscr{B}$ 。

  $\mathscr{A} : \frac{y}{x^2} = a \,, \overset{d}{\Longrightarrow} \mathscr{A} : \frac{x^2\,dy - 2xy\,dx}{x^4} = 0$ 意即 $\mathscr{A}$ 族的 $(dx, dy) \perp (-2y, x)$, 則 $\mathscr{B}$ 族的 $(dx, dy) \parallel (-2y, x)$, 即: $\mathscr{B} : dx/dy = -2y/x \Rightarrow x\,dx + 2y\,dy = 0, \overset{\int}{\Longrightarrow} \mathscr{B} : x^2 + 2y^2 = b$, $b \geq 0$ (橫縱軸比例 $\sqrt{2} : 1$ 橢圓族)。



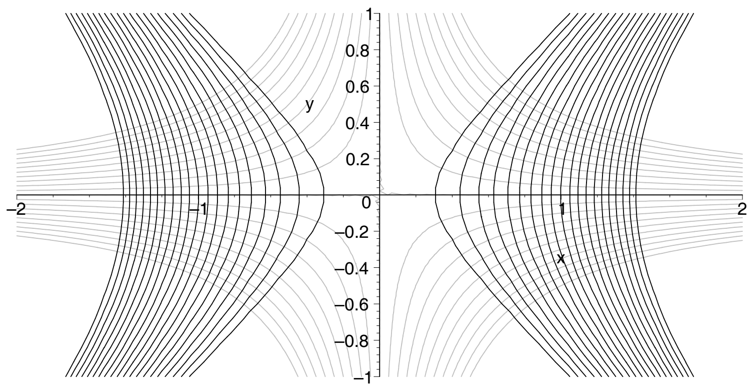

- 求: 與 曲線族 $\mathscr{A} : x^2 + 4y^2 = a$, $a \in \mathbb{R}$ (橫縱軸比例 $2 : 1$ 橢圓族) 正交的 曲線族 $\mathscr{B}$ 。

  $\overset{d}{\Longrightarrow} \mathscr{A} : x\,dx + 4y\,dy = 0$ 意即 $\mathscr{A}$ 族的 $(dx, dy) \perp (x, 4y)$, 則 $\mathscr{B}$ 族的 $(dx, dy) \parallel (x, 4y)$, 即: $\mathscr{B} : dx/dy = x/4y \Rightarrow 4\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, \overset{\int}{\Longrightarrow} 4\ln x = \ln y + c, \overset{\mathrm{e}()}{\Longrightarrow} \mathscr{B} : y = bx^4$, $b \in \mathbb{R}$。




- 求: 與 曲線族 $\mathscr{A} : x^2 - y^2 = a$, $a \in \mathbb{R}$ (橫縱軸比例 $1 : 1$ 雙曲線族) 正交的 曲線族 $\mathscr{B}$ 。

  $\overset{d}{\Longrightarrow} \mathscr{A} : x\,dx - y\,dy = 0$ 意即 $\mathscr{A}$ 族的 $(dx, dy) \perp (x, -y)$, 則 $\mathscr{B}$ 族的 $(dx, dy) \parallel (x, -y)$, 即: $\mathscr{B} : dx/dy = -x/y \Rightarrow \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0, \overset{\int}{\Longrightarrow} \ln x + \ln y = c, \overset{\mathrm{e}()}{\Longrightarrow} \mathscr{B} : x \cdot y = b$, $b > 0$。




解一階微分方程的問題 其實 還是得用到 不定積分的技巧。不會積分就無法解題。

 mwu@mail.tku.edu.tw