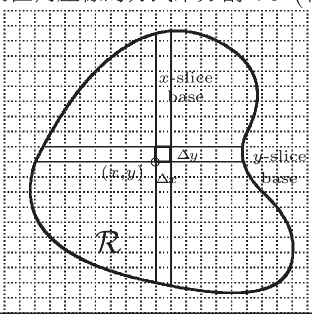
Multiple Integral (重積分)

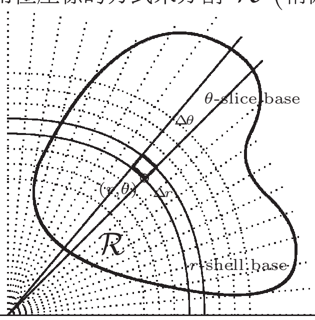
令 $\mathcal{O}$ 爲$\Big\{$夾在 曲面$\mathcal{S}: z = f(x,y)$ 與 xy 平面之間、區域 $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ 所框出的 3-d 區域$\Big\}$. 則 $\mathcal{O}$ 的體積爲 $\displaystyle\int_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dA$, 符號意義爲: 長條形體積 (高爲 $f(x,y)$, 底爲 dA) 加總。其中, dA 表示 differential of area (微面積)。何謂 dA?

例如, 用直角座標的方式來分割 $\mathcal{R}$ (稍微改變座標參數 x, y),



$$
\begin{array}{lll}
\text{則 小塊面積 (粗分)} & \Delta A & = \Delta x \Delta y\ , \\
\Longrightarrow \text{微面積 (細分)} & dA & = dx\,dy\ 。
\end{array}
$$

例如, 用極座標的方式來分割 $\mathcal{R}$ (稍微改變座標參數 r, θ),



$$
\begin{array}{lll}
\text{則 小塊面積 (粗分)} & \Delta A & = \frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\Delta\theta - \frac{1}{2}r^2\Delta\theta \\
 & & = \underline{r\,\Delta r\,\Delta\theta} + \underbrace{\cancel{\tfrac{1}{2}(\Delta r)^2\,\Delta\theta}_{\approx 0}}_{\text{很小, 相對於 } r\,\Delta r\,\Delta\theta}\ , \\
\Longrightarrow \text{微面積 (細分)} & dA & = \underline{r\,dr\,d\theta}\ 。
\end{array}
$$

$\displaystyle\int_{\mathcal{R}} f\,dA$ 不見得就得是 double integral, 就看你是想把 $\mathcal{R}$ 切成條就好了呢, 還是要接著將條再切成段 (即 $\mathcal{O}$ “切片”, 片再 “切絲”)。所以首先必須先決定如何分割 $\mathcal{R}$, 再來就是要決定積分順序。像上面兩種常見的分割方式, 就有所謂的 double integrals:

$$
\begin{array}{ll|ll}
\displaystyle\int_{\mathcal{R}} f\,dA & = \displaystyle\iint\limits_{\mathcal{R}} f\,dx\,dy & = \displaystyle\iint\limits_{\mathcal{R}} f\,dy\,dx & \text{double integrals}(\mathcal{R}\text{切成塊}) \\
 & = \displaystyle\int_*^* \underbrace{\overbrace{\left[\int_*^* f\,dx\right]}^{\substack{y\text{-slice area } \mathcal{A}_y,\\ \text{a function of } y}} \overbrace{dy}^{\substack{y\text{-slice}\\ \text{thickness}}}}_{y\text{-slice volume}} & = \displaystyle\int_*^* \underbrace{\overbrace{\left[\int_*^* f\,dy\right]}^{\substack{x\text{-slice area } \mathcal{A}_x,\\ \text{a function of } x}} \overbrace{dx}^{\substack{x\text{-slice}\\ \text{thickness}}}}_{x\text{-slice volume}} & \text{double integrals}(\mathcal{R}\text{切成塊}) \\
 & = \displaystyle\int_*^* \mathcal{A}_y(y)\,dy & = \displaystyle\int_*^* \mathcal{A}_x(x)\,dx & \text{single integrals}(\mathcal{R}\text{切成條})\ , \\
\hline
 & = \displaystyle\iint\limits_{\mathcal{R}} f\,r\,dr\,d\theta & = \displaystyle\iint\limits_{\mathcal{R}} f\,r\,d\theta\,dr & \text{double integrals}(\mathcal{R}\text{切成塊}) \\
 & = \displaystyle\int_*^* \underbrace{\overbrace{\left[\int_*^* f\,r\,dr\right]}^{\substack{\theta\text{-slice area } \mathcal{A}_\theta,\\ \text{a function of } \theta}} \overbrace{d\theta}^{\substack{\theta\text{-slice}\\ \text{thickness}}}}_{\theta\text{-slice volume}} & = \displaystyle\int_*^* \underbrace{\overbrace{r\left[\int_*^* f\,d\theta\right]}^{\substack{r\text{-shell area } \mathcal{A}_r,\\ \text{a function of } r}} \overbrace{dr}^{\substack{r\text{-shell}\\ \text{thickness}}}}_{r\text{-shell volume}} & \text{double integrals}(\mathcal{R}\text{切成塊}) \\
 & = \displaystyle\int_*^* \mathcal{A}_\theta(\theta)\,d\theta & = \displaystyle\int_*^* \mathcal{A}_r(r)\,dr & \text{single integrals}(\mathcal{R}\text{切成條})\ . \\
\hline
\end{array}
$$

所謂 $\mathbb{R}^2$ 區域的 "面積", 就是 n-dimensional volume, $n=2$ 的情況。爲了統一符號, 以後的微面積"dA" 將由 微體積"dV" 取代。

令 $\mathbf{r}\in\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$, $\varrho=\varrho(\mathbf{r})$ 爲物體$\mathcal{O}$ 在 $\mathbf{r}$ 處的密度, 物體$\mathcal{O}$ 所涵蓋的區域 權稱作 $\mathcal{R}$。則質點 (particle) 的質量 $dm=\varrho\,dV$, i.e. 微質量 = 密度 × 微體積, 不再贅言。

- 在 $\mathbf{r}$ 處的質點 (particle) 以原點爲支點 所產生的微力矩 爲 $\underset{\text{力臂}}{\mathbf{r}}\ \underset{\text{微質量}}{dm}$,

  物體$\mathcal{O}$ 的質量中心 (重心) $\bar{\mathbf{r}}=\dfrac{\text{總力矩}}{\text{總質量}}=\dfrac{\int_{\mathcal{R}}\mathbf{r}\,dm}{\int_{\mathcal{R}}dm}$。

  質點dm 對 軸L 旋轉之轉動慣量 爲 $r^2\,dm$;
  物體$\mathcal{O}$ 對 L 旋轉之轉動慣量 爲 $\int_{\mathcal{R}}r^2\,dm$, 其中 r 表示 dm 到 旋轉軸 L 的距離。

- $\mathbf{r}\in\mathbb{R}^n$, $f(\mathbf{r})\in\mathbb{R}$。從不同的角度來看 $I=\int_{\mathcal{R}}f(\mathbf{r})\,dV$:
  若 $\mathbf{r}\in\mathbb{R}^2$, $\mathcal{R}\subseteq\mathbb{R}^2$: 可以將 $f(\mathbf{r})$ 當做是 $\mathcal{R}$ 在 $\mathbf{r}=(x,y)$ 處的密度, 則 I 就解釋成 某 2-d 物體的總質量; I 也可以解釋成 $z=0$ 到 $z=f(x,y)$ 間、$\mathcal{R}$內 的 3-d 體積。
  若 $\mathbf{r}\in\mathbb{R}^3$, $\mathcal{R}\subseteq\mathbb{R}^3$: 可以將 $f(\mathbf{r})$ 當做是 $\mathcal{R}$ 在 $\mathbf{r}=(x,y,z)$ 處的密度, 則 I 就解釋成 某 3-d 物體的總質量; I 也可以解釋成 $w=0$ 到 $w=f(x,y,z)$ 間、$\mathcal{R}$內 的 4-d 體積。

- 物體的切割方式

2-d:	直角座標 $dV := dx\,dy$,	極座標 $dV := r\,dr\,d\theta$,	$\cdots$	
3-d:	直角座標 $dV := dx\,dy\,dz$,	圓柱座標 $dV := r\,dr\,d\theta\,dz$,	球面座標 (見 Figure 1) $dV := \rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$,	$\cdots$

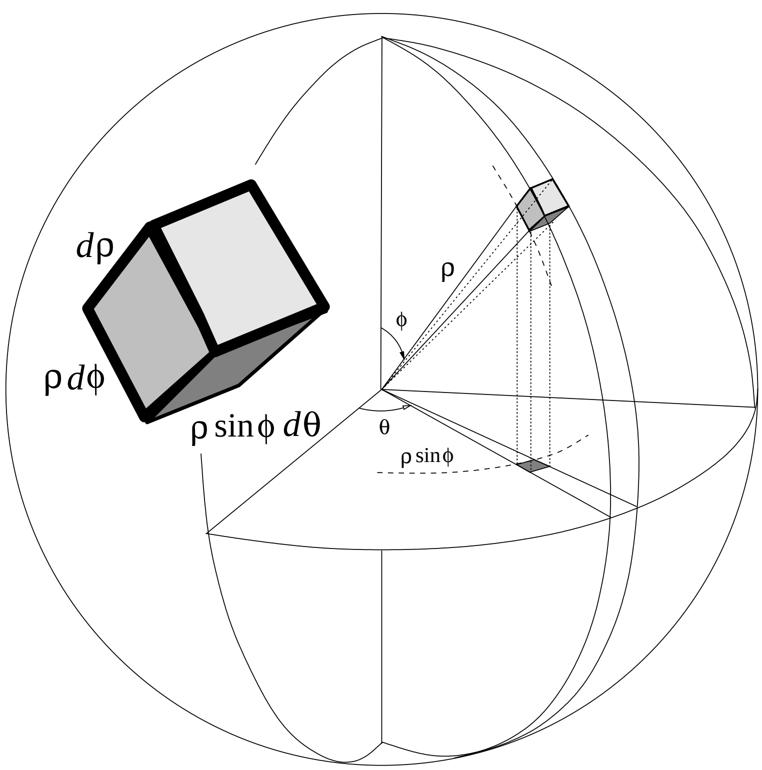


Figure 1: 球面座標的 dV

- 若 dS 的單位法向量爲 $\hat{\mathbf{n}}$, 到 xy平面的投影爲 dA 且兩片夾角爲 θ(當然小於 π), 則 $\cos\theta = \hat{\mathbf{n}} \bullet \hat{\mathbf{e}}_3$, $dS = \dfrac{dA}{|\cos\theta|}$.

  曲面 $\mathcal{S}$ 到 xy平面的投影爲 $\mathcal{R}$, 依某方式切割 $\mathcal{R}$ 以計算表面積: $\displaystyle\int dS = \int_{\mathcal{R}} \frac{dA}{|\cos\theta|}$ ($\cos\theta$ 因位置而異)。

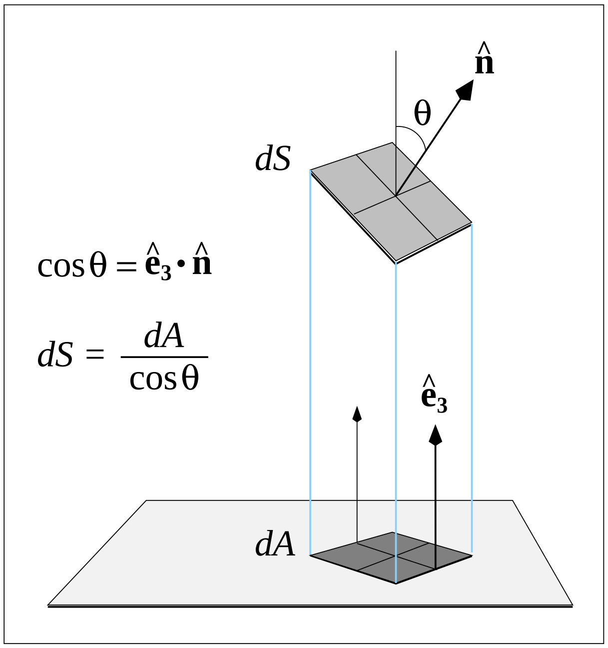


Figure 2: 微表面積 dS ($\|\hat{\mathbf{n}}\| = 1$)

1. 若 2-d 曲面 $\mathcal{S}$ 是由方程 $z = f(x, y)$ 所定義的, 則, 按照直角座標的切割方式, 微表面積 dS 的投影爲 $dA := dx\,dy$, 而 dS 的 法向量 $/\!/\, \vec{\mathbf{n}} = (\nabla f, -1) = (f_x, f_y, -1)$。假設 dS 和 dA 的夾角爲 θ, 等於 法向量 $\vec{\mathbf{n}}$ 和 法向量 $\hat{\mathbf{e}}_3$ 之間的夾角, 則 (見 Figure 2)

$$|\cos\theta| = \frac{|\vec{\mathbf{n}} \bullet \hat{\mathbf{e}}_3|}{\|\vec{\mathbf{n}}\|\,\|\hat{\mathbf{e}}_3\|} = \frac{|-1|}{\sqrt{\|\nabla f\|^2 + 1} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1}},$$

$$\int dS = \int_{\mathcal{R}} \frac{dA}{|\cos\theta|} = \int_{\mathcal{R}} \sqrt{\|\nabla f\|^2 + 1} \cdot dA = \iint_{\mathcal{R}} \sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1}\, dxdy \text{ 。}$$

2. 若 2-d 曲面 $\mathcal{S}$ 是由方程 $g(x, y, z) = 0$ 所定義的 (a level surface), 則, 按照直角座標的切割方式, 微表面積 dS 的投影爲 $dA := dx\,dy$, 而 dS 的 法向量 $/\!/\, \vec{\mathbf{n}} = \nabla g = (g_x, g_y, g_z)$。假設 dS 和 dA 的夾角爲 θ, 等於 法向量 $\vec{\mathbf{n}}$ 和 法向量 $\hat{\mathbf{e}}_3$ 之間的夾角, 則

$$|\cos\theta| = \frac{|\vec{\mathbf{n}} \bullet \mathbf{e}_3|}{\|\vec{\mathbf{n}}\|\,\|\hat{\mathbf{e}}_3\|} = \frac{|g_z|}{\|\nabla g\|} = \frac{|g_z|}{\sqrt{(g_x)^2 + (g_y)^2 + (g_z)^2}},$$

$$\int dS = \int_{\mathcal{R}} \frac{dA}{|\cos\theta|} = \int_{\mathcal{R}} \left.\frac{\|\nabla g\|}{|g_z|}\right|_{g=0} dA = \iint_{\mathcal{R}} \left.\frac{\sqrt{(g_x)^2 + (g_y)^2 + (g_z)^2}}{|g_z|}\right|_{g=0} dxdy \text{ 。}$$

這裡必須注意的是, 由上述的分割, 表面積 $\displaystyle\int dS$ 式子裡沒有 dz, 即 z 不是積分式子裡的變量。因此可知, 我們必須把方程 $g(x, y, z) = 0$ 的 z 用 x, y 表示才行, 也就是說, 如果 z 的表示法不唯一, 曲面 $g(x, y, z) = 0$ 就會有“上、下”之分。

- 不同的 2-d(或 3-d) 的 微體積 dV 之間的關係, 也可以從所謂的 $Jacobian$ 得到:

2-d: $\begin{cases} x(r,\theta) = r\cos\theta \\ y(r,\theta) = r\sin\theta \end{cases}$,

直角座標	極座標
$dV := dx\,dy,$	$dV := \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}}_{\text{Jacobian } \lvert\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\rvert} dr\,d\theta$ $= \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} dr\,d\theta$ $= r\ dr\,d\theta\ .$

3-d: $\begin{cases} x(r,\theta,z) = r\cos\theta \\ y(r,\theta,z) = r\sin\theta \\ z(r,\theta,z) = z \end{cases}$,

直角座標	圓柱座標
$dV := dx\,dy\,dz,$	$dV := \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix}}_{\text{Jacobian } \lvert\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\rvert} dr\,d\theta\,dz$ $= \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} dr\,d\theta\,dz$ $= r\ \ dr\,d\theta\,dz\ ;$

3-d: $\begin{cases} x(\rho,\theta,\phi) = \rho\sin\phi\cos\theta \\ y(\rho,\theta,\phi) = \rho\sin\phi\sin\theta \\ z(\rho,\theta,\phi) = \rho\cos\phi \end{cases}$,

直角座標	球面座標
$dV := dx\,dy\,dz$	$dV := \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix}}_{\text{Jacobian } \lvert\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)}\rvert} d\rho\,d\theta\,d\phi$ $= \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \rho\sin\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\sin\theta \\ \cos\phi & 0 & -\rho\sin\phi \end{vmatrix} d\rho\,d\theta\,dz$ $= \rho^2\sin\phi\ \ d\rho\,d\theta\,d\phi\ .$