Limits and Continuity(極限與連續)

極限

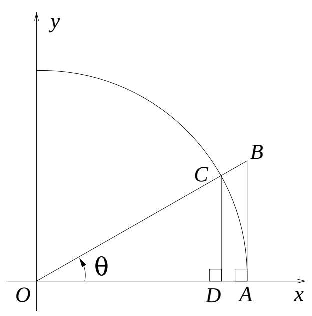
- $\pm\infty$ 是概念, 不是數.
- "ϵ, δ" 定義: The limit of $f(x)$ as x approaching a is said equal to L, denotes $\lim_{x\to a} f(x) = L$, provided that for any given $\epsilon > 0$, there exists $\delta > 0$, such that whenever $0 < |x-a| < \delta$ implies $|f(x) - L| < \epsilon$.
- "... 在 a 處的極限存在...", 則 以**任何方向**、**任何方式**趨近 a (但到不了a), 都要得到相同的結果 才叫存在。所以, 左右極限不相等, 或, 等於 $\pm\infty$, 都是極限不存在. 這些觀念從 "ϵ, δ" 的定義裡都看得出來。
- 一個極限不能任意拆開! 只有當 $\lim_{x\to a} f(x)$ 和 $\lim_{x\to a} g(x)$ 都存在時, 才能說

$$\lim_{x\to a}\Big(f(x) \circledast g(x)\Big) = \lim_{x\to a} f(x) \circledast \lim_{x\to a} g(x) \qquad (\text{這裡“}\circledast\text{”指的是 } +, -, \times)$$

  如果再多加一個條件 $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$, "$\circledast$" 就可以是 $\div$。
- 當 x 某固定方向趨近 a 時, 若 $f(x)\nearrow$ (or $\searrow$) 並且 $f(x) < U$ (or $> L$), 則 x 此方向趨近 a 時 $f(x)$ 的極限值存在。這也是証明極限存在的另一種方式。(U: upper bound, L: lower bound, a can be $\pm\infty$)
- 有兩個基本的極限你務必要知道:

  壹, $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$: 在單位圓上 (如圖), 假設 θ 很小 ($\theta \approx 0^+, \sin\theta > 0, \cos\theta > 0$),

$$\begin{array}{rcccccl}
 & \triangle COD & \le & \text{扇}COA & \le & \triangle BOA & \text{, i.e.} \\
 & \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta & \le & \frac{1}{2}\times 1^2 \times\theta & \le & \frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}, & \\
\iff & \cos\theta & \le & \frac{\theta}{\sin\theta} & \le & \frac{1}{\cos\theta}, & \\
\iff & \cos\theta & \le & \frac{\sin\theta}{\theta} & \le & \frac{1}{\cos\theta}, & \\
 & \downarrow_{\theta\to 0} & & \downarrow_{\theta\to 0} & & \downarrow_{\theta\to 0} & \\
\Rightarrow & 1 & \le & \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} & \le & 1 &
\end{array}$$



  貳, $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \approx 2.71828\cdots$: 令 $a_n \overset{\text{def}}{=} (1+\frac{1}{n})^n$, 則

  (一) a_n 有上界: $\left(\text{二項展開: } (A+B)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}A^iB^{n-i} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}A^{n-j}B^j\right)$

$$\binom{n}{j}\frac{1}{n^j} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-j+1)}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots j}\frac{1}{n\cdots n} = \frac{1}{j\,!}\underbrace{\left[\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-j+1)}{n\cdot n\cdot n\cdots n}\right]}_{\Phi_{n,j}\ (\text{眞分數})} \le \frac{1}{j\,!},$$

$$\begin{aligned}
\therefore a_n &= (1+\tfrac{1}{n})^n \\
&= \binom{n}{0}\frac{1}{n^0} + \binom{n}{1}\frac{1}{n^1} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n-1}\frac{1}{n^{n-1}} + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \\
&\le 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\
&\le 1 + \underbrace{\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)}_{\text{等比級數}} < 3\ .
\end{aligned}$$

(二) a_n 遞增: 我們注意到 $\Phi_{n,j} := \frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-j+1}{n}$ 是 $j-1$ 個眞分數相乘，$\therefore\ \Phi_{n,j} < \Phi_{n+1,j}$，
$\Rightarrow \binom{n}{j}\frac{1}{n^j} < \binom{n+1}{j}\frac{1}{(n+1)^j}$，$\therefore 0 < a_n < a_{n+1}$.

$0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots < 3$, 遞增又有上界, 所以極限值 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 一定存在。這個數叫做 *natural base* $e \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n \approx 2.71828\cdots$, 是一個無理數, 然後, 把以 e 爲底的對數函數 $\log_e(\ )$ 簡寫成 $\ln(\ )$。

求極限的基本技巧: 先觀察, 後化簡 (eg. 因式分解、約分、...), 或轉換 (eg. $\infty \rightleftharpoons 0$、rationalize(有理化)、...), 不然就用夾擊法 (*squeezing by sandwich inequality*) 試試。

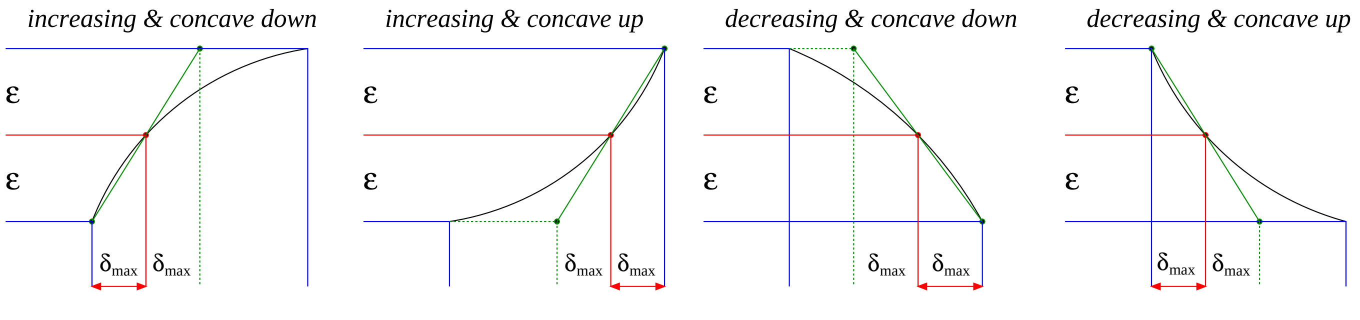
Example 1 有理化的例子。

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+3x}-2x) &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{4x^2+3x}-2x}{1}\cdot\frac{\sqrt{4x^2+3x}+2x}{\sqrt{4x^2+3x}+2x}\right)\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+3x-(2x)^2}{\sqrt{4x^2+3x}+2x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{4x^2+3x}+2x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{4+\frac{3}{x}}+2} = \frac{3}{4}\text{。}\blacksquare
\end{aligned}$$

在還沒學會 derivative 之前, 不可以用 "*L'Hôpital's Rule*"(羅畢達法則), 況且 *L'Hôspital's Rule* 不是所有問題都適用。

連續

- "ϵ, δ" 定義: $f(x)$ is said *continuous at* a provided that for any given $\epsilon > 0$, there exists $\delta > 0$, such that whenever $|x-a| < \delta$ implies $|f(x)-f(a)| < \epsilon$. 比較極限定義後得知 f 在 a 連續的等價定義爲: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
- 給定函數值在 $f(a)$ 的最大容許誤差 ϵ, 如果已經知道函數在 a 點附近的走向及凹凸性, 則無須經由數值比較就可以找出 以 a 爲中心、容許 的最大輸入誤差半徑 δ, 例如, 下圖的幾種情況:



- 什麼叫做連續函數? 簡單的說, 就是:"極限值等於函數值"——
若函數 f 在 a 點的極限值 等於 f 在 a 點的值, 則稱 函數 f 在 a 點連續。(a 當然是在 f 的 domain D_f 裡頭, 否則 憑什麼說"f 在 a 點的值"呢? 想像：如果 f 在 a 點連續, 是否 f 也會在某個包含 a 的小區間 I' 上連續? 再請盯著 "ϵ, δ" 定義瞧, 是否: 滿足連續定義的 a 一定是 D_f 的內點(interior)呢?)

$\Longrightarrow$ 討論 f 在 非D_f內點處 的連續性 是毫無意義的!!!
若對於所有的 $a \in I$ 而言, 皆滿足連續定義, 則稱 函數 f 在 I 上連續。

- 只有當 $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ 存在 且 $f(x)$ 在 $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ 連續 時, 才能說 $\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim\limits_{x\to a} g(x))$。
 (課本裡給了一堆 limit laws, 總歸就是這一句話)
 知道這點後, 以前濫用的, 現在開始 就要去認識 到底哪些是 連續函數 ...

極限的應用

除了用來定義 derivative(導數) 外, 具體可以求 slant asymptote(斜漸近線) 方程式:

假設 $y = mx + b$ 是 $y = f(x)$ 的 (斜) 漸近線 (不是垂直漸近線 的情況), 則 $\lim\limits_{x\to\infty}\Big(f(x) - (mx+b)\Big) = 0$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}\Big(f(x) - (mx+b)\Big) = 0$。若前者是真, 則 $\lim\limits_{x\to\infty}\Big(f(x) - mx\Big) = b \Longrightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = m$, i.e. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ 存在, 則斜漸近線的 斜率 m 就等於 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$。求得 m 之後, $b = \lim\limits_{x\to\infty}\Big(f(x) - mx\Big)$ 也求出來了。

所以從上述得知, 若某函數有斜漸近線, 可能是左右分別趨近兩條, 也可能左右趨近同一條, 也可能只有左邊趨近、沒有右邊趨近, 或相反。

Example 2 函數 $f(x) = \sqrt{4x^2+3x}$ 的圖形 Γ_f 有漸近線嗎?
若 $y = mx + b$ 是 $y = f(x)$ 的 (斜) 漸近線, 則

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+3x}}{x} = \lim_{x\to\infty}\sqrt{4+\frac{3}{x}} = 2, \\ b &= \lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+3x} - 2x) = \cdots = \frac{3}{4}, \text{ 見 Example 1。} \end{aligned}$$

類似地, $x \to -\infty$ 的情況 得到的是 $m = -2, b = \frac{-3}{4}$, i.e. 有兩條斜漸近線 $\begin{array}{l} y = 2x + \frac{3}{4} \\ y = -2x - \frac{3}{4} \end{array}$, 見 Figure 1。■

Example 3 方程式 $-4x^2y - 8x^2 + y^3 - 2y^2 - 4y + 7 = 0$ 的圖形 Γ 有漸近線嗎?
當 $x \neq 0$ 時, 說 "$f(x,y) = 0$ " 是 與原式等價的方程式吧, 例如, $f(x,y)$ 可以是

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (-4x^2y - 8x^2 + y^3 - 2y^2 - 4y + 7)/x^n,\ n \in \mathbb{N},\ \text{則} \\ f(x, mx+b) &= [-4x^2(mx+b) - 8x^2 + (mx+b)^3 - 2(mx+b)^2 - 4(mx+b) + 7]/x^n \\ &= \Big[(m^3-4m)x^3 + [(3b-2)m^2-4b-8]x^2 + (3b^2-4b-4)mx + (b^3-2b^2-4b+7)\Big]/x^n. \end{aligned}$$

若 $y = mx + b$ 是 Γ 的漸近線, 則 當 $x \to -\infty$ 或 $x \to +\infty$ 時 (這時 x 不爲零) , $f(x, mx+b)$ 應該會趨近於 0 才對, 且任何 $n \in \mathbb{N}$ 都得適用 : $\Rightarrow m = \begin{cases} 0, \\ -2, \\ +2, \end{cases} \Rightarrow$ 對應的 $b = \begin{cases} -2, \\ 2, \\ 2, \end{cases}$ i.e. 有三條漸近線 $\begin{array}{l} y = -2 \\ y = -2x + 2 \\ y = 2x + 2 \end{array}$, 見 Figure 2。■

在前面的例子中, 我們假設 在正負無窮遠處有 $y = mx + b$ 類型的漸近線。倘若不存在任何一組 m, b, 就只能說明沒有 $y = mx + b$ 這類型的漸近線。還是可能其他種的!

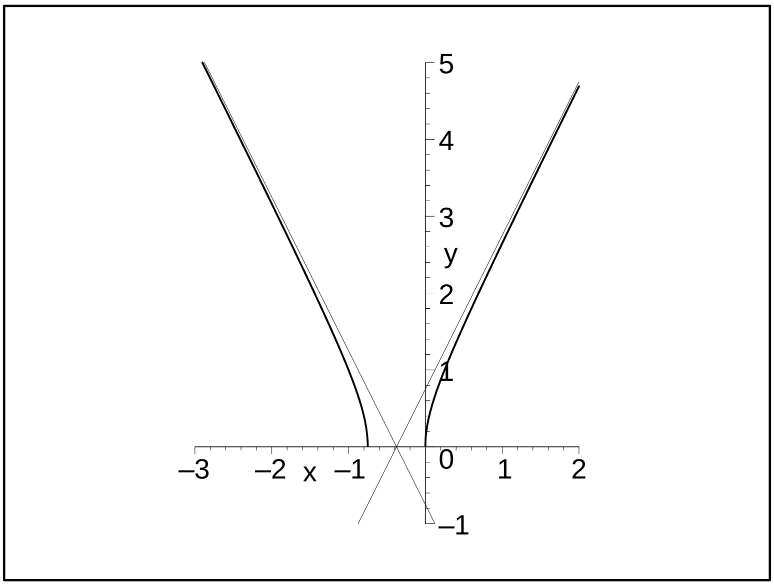


Figure 1: $y = \sqrt{4x^2 + 3x}$

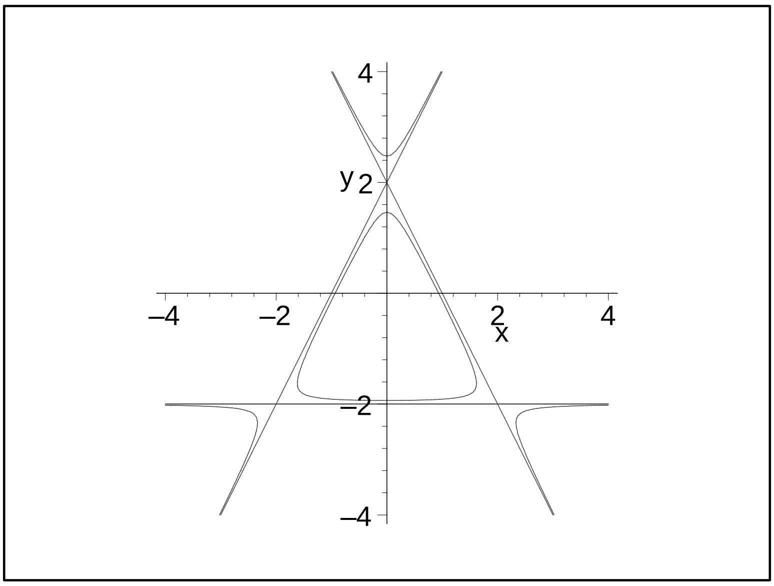


Figure 2: $-4x^2y - 8x^2 + y^3 - 2y^2 - 4y + 7 = 0$

如果 $f(x) := \frac{N(x)}{D(x)}$ 是一個**有理式**(rational function, 即 分子$N(x)$ 分母$D(x)$ 皆爲多項式), 並且 $N(x), D(x)$ 沒有公因式 (common factor), 則 垂直漸近線全部由分母$D(x)$的實數根包辦, 即 $D(c) = 0, c \in \mathbb{R} \implies x = c$ is a V-asym, 並且

If $\deg N < \deg D$ then $\exists$ H-asym. $y = 0$(即 x-axis), 因爲 $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$;

$\deg N = \deg D$ $\exists$ H-asym. $y = c$, 因爲 $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = c \neq 0$;

$\deg N = \deg D + 1$ $\exists$ slant asymptote, 用前述的一般方法, 或下面的方法來求：

$\deg N > \deg D + 1$ $\exists$ asymptotic curve, 用下面的方法來求：

對有理式 $f(x) := \frac{N(x)}{D(x)}$ 而言, 可以用長除法 (long division) 或 綜合除法 (synthetic division) 將 $N(x)$ 改寫成 $N(x) = q(x)D(x) + r(x)$ 求出 商 $q(x)$ 和 餘式 $r(x)$, 然後 $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{D(x)}$, 則 $f(x) \approx q(x)$ at $\pm\infty$ (因爲 $\deg r < \deg D$, $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{r(x)}{D(x)} = 0$), 即 $y = q(x)$ 爲 $y = f(x)$ 的 漸近(曲) 線。

一般情況, 如果函數 $f(x) \approx g(x)$ at $+\infty$ (or at $-\infty$), 則 $y = g(x)$ 爲 $y = f(x)$ 的漸近 (曲) 線。

Example 4

有理式 $f(x) = \frac{x^3+1}{x} = x^2 + \frac{1}{x}, \Rightarrow$ $x = 0$ 是一 vertical asymptote, 因爲 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, 因爲 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

$y = x^2$ 是一 asymptotic curve, 因爲 $\lim\limits_{x\to -\infty} [f(x) - x^2] = 0$, 因爲 $\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x) - x^2] = 0$.

如何分析 $f(x)$ 的行徑 (eg., 爲了畫圖):

$f(x) < x^2$ if $x < 0$, 即: 在 $x < 0$ (左半平面), Γ_f 總在 漸近曲線 $y = x^2$ 的下方,

$f(x) > x^2$ if $x > 0$, 即: 在 $x > 0$ (右半平面), Γ_f 總在 漸近曲線 $y = x^2$ 的上方,

並且利用前述幾點, 就可以大約描繪出 Γ_f 的長相, 見 Figure 3。

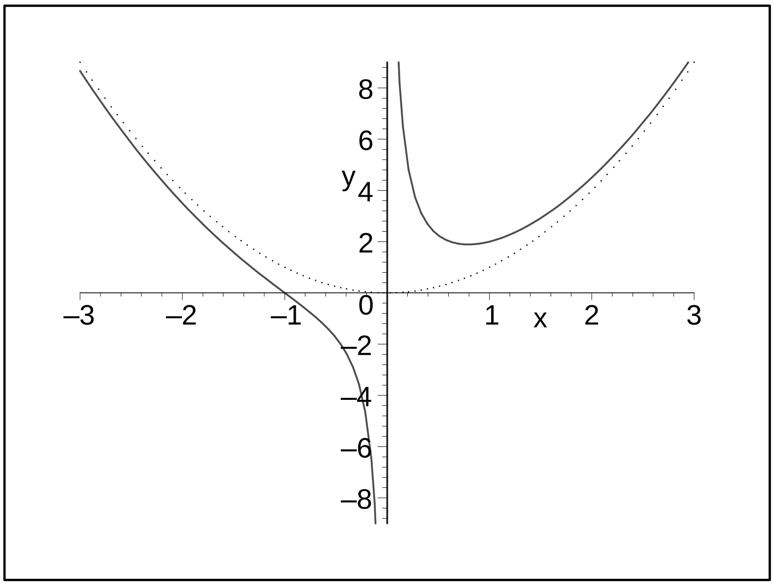


Figure 3: $y = \frac{x^3+1}{x}$

在講到 derivative 時會加入更多資訊 (圖形走向、凹凸性等) 使函數的描述更爲精確。

連續的應用

Intermediate Value Theorem (中間值定理) 的意思是說, 若 函數 f 在 a、b 之間連續, 則任何介於 $f(a)$、$f(b)$ 的數 r, 一定可以在 a、b 之間找到一個 c 使得 $f(c) = r$。

從 f 的圖形來解釋, 就是 介於 橫線 $y = f(a)$、橫線 $y = f(b)$ 之間的一條橫線 $y = r$, 一定會和 Γ_f 相交於 豎線 $x = a$、豎線 $x = b$ 之間。前面說的那個 c 只是 其中一個交點的 x 座標。

中間值定理 常常 配合運用 二分法 (bisection method) 來找 連續函數 實根 (real root) 的位置。