$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$ 坐标可以互换

则 $\begin{cases} dx = \dfrac{\partial x}{\partial u} du + \dfrac{\partial x}{\partial v} dv \\ dy = \dfrac{\partial y}{\partial u} du + \dfrac{\partial y}{\partial v} dv \end{cases}$，就是 $\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$ 啦！

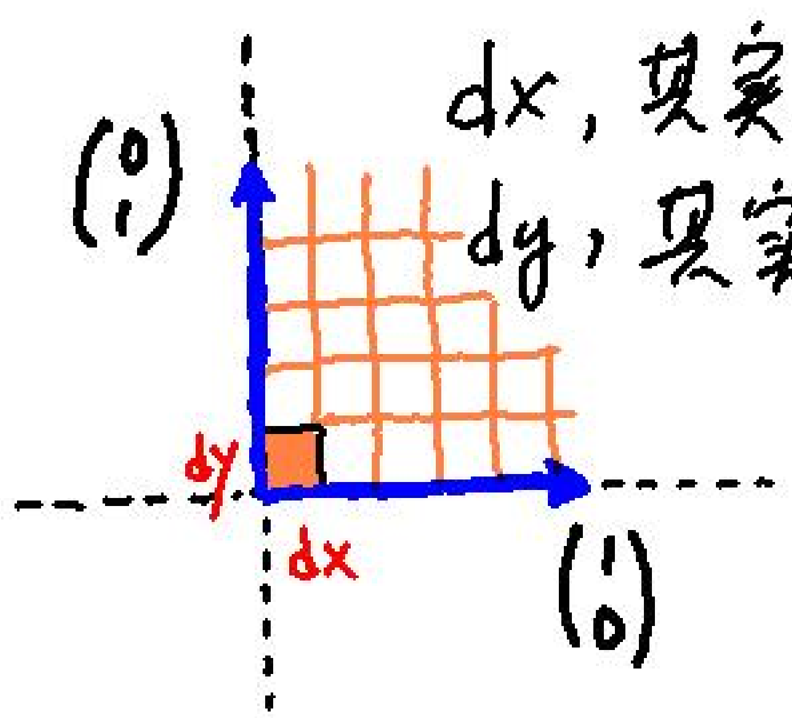
什么意思呢？ $\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$ 表示的是位移 你别忘了！ $\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$ 也是。

微面积 $dA = dx\,dy$ 的话，为什么不是 $\left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv\right)$ 呢？

$$= \underline{*(du)^2} + \underline{*\,du\,dv} + \underline{*(dv)^2}$$

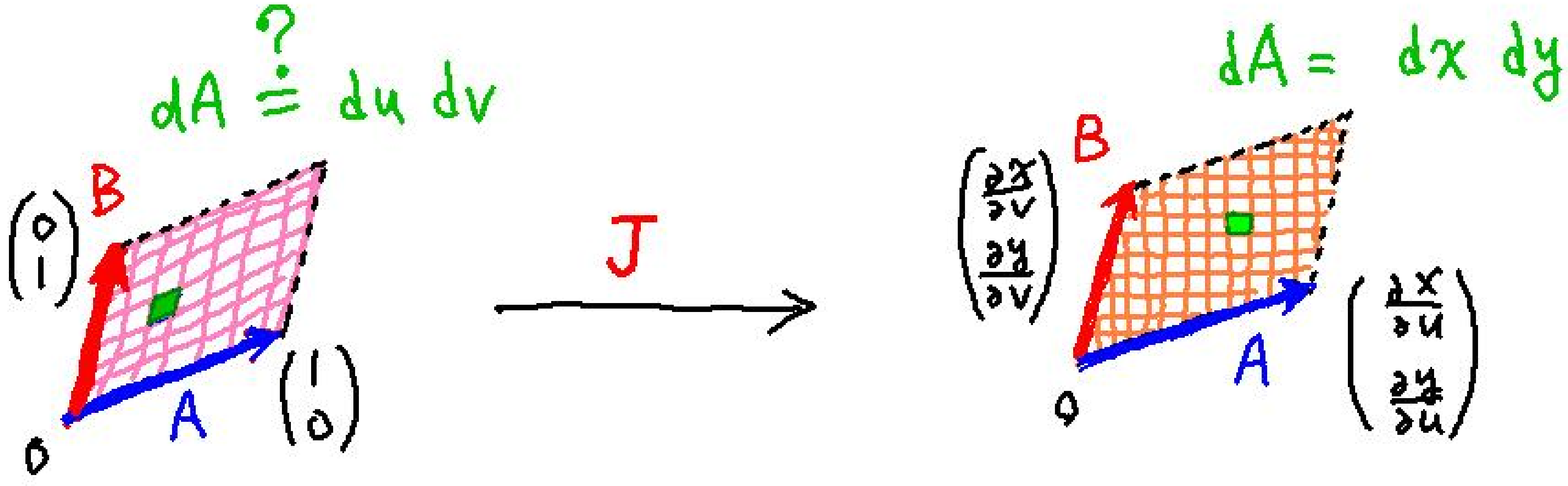
有人说，"因为「平方」的关系，＿＿和＿＿可以省略"，为了凑答案而胡说八道，简直是莫名其妙到极点！

在 xy 坐标系里头，当 x,y 做小小变动所得到的



dx，其实走的是 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 方向，　因为这两个方向是正交的，
dy，其实走的是 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 方向。　所以 dA 才会是 dx 乘以 dy.

可是 u,v 坐标系未必是以正交的单位向量为基……



u, v 坐标系　　　　x, y 坐标系

从刚刚的 $\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}}_{\mathbf{J}} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$ 的关系可以知道，

在 u, v 坐标系的 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 向量^A，在 x y 坐标系就叫 $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \end{pmatrix}^A$；

在 u, v 坐标系的 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 向量^B，在 x y 坐标系就叫 $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}^B$；

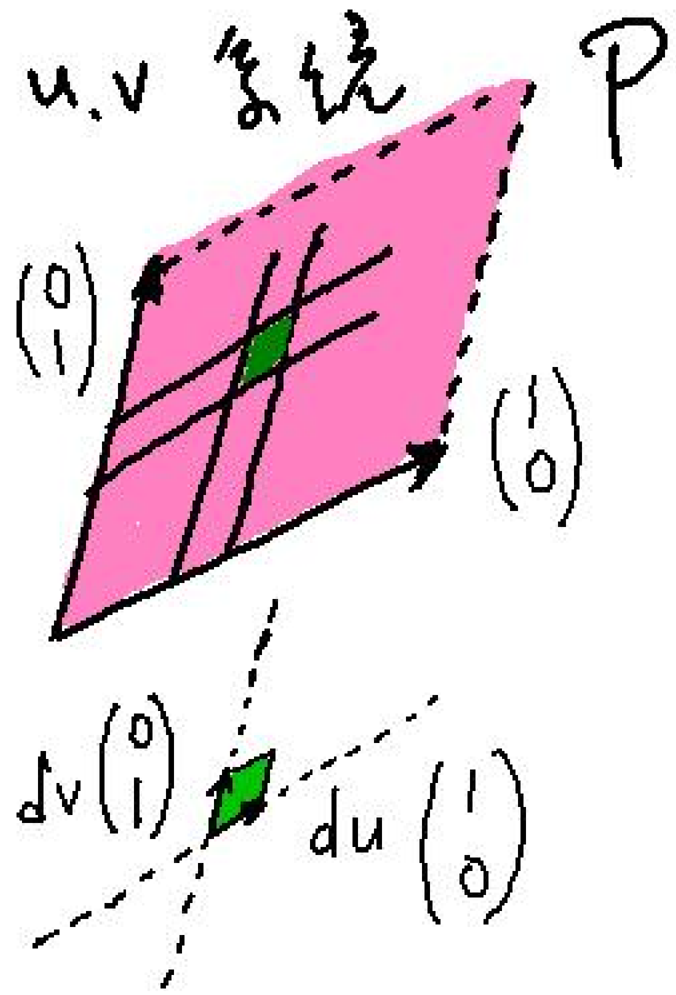
（在 u, v 坐标系的 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 未必是正交的）

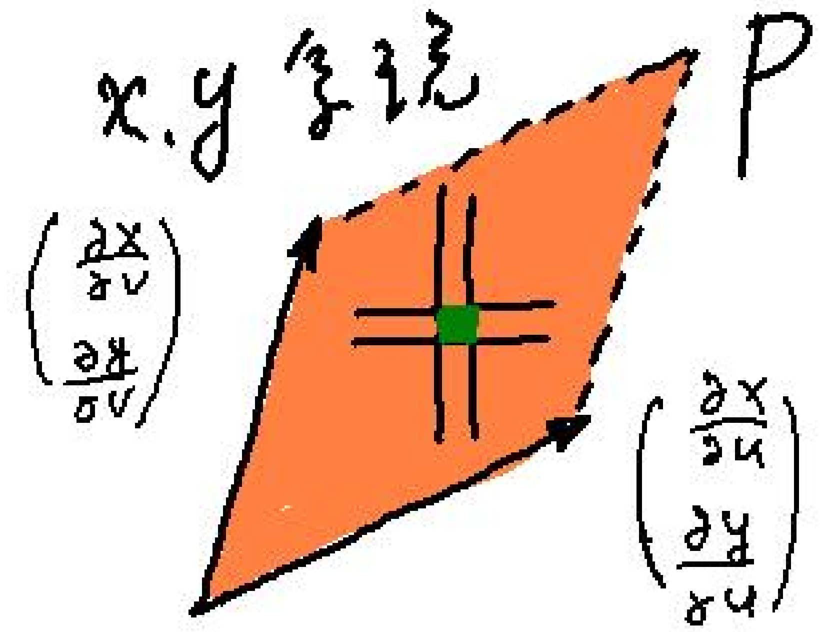
你知道在 正交 x y 坐标系底下，$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ 所夹的平行四边形面积怎么求吧？

不就是 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ 嗎？

根据 J-1, J-2 的讨论，我们可以了解，

在 (u,v) 系统中，由 u,v 稍微变化所扫出的区域 dA，还是要以正交的切割方式来估计：





大块 P 的面积，

以 (u,v) 系统表示：由 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 所夹，若改从

(x,y) 正交系统表示：由 $\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}\\ \frac{\partial y}{\partial u}\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}$ 所夹；面积为 $\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$

由 (u,v) 变化而生的 dA，由 $du\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 与 $dv\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 所夹，若改由

(x,y) 正交系统表示：由 $du\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}\\ \frac{\partial y}{\partial u}\end{pmatrix}$ 与 $dv\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}$ 所夹，所以

$$dA = \begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}du & \frac{\partial x}{\partial v}dv\\ \frac{\partial y}{\partial u}du & \frac{\partial y}{\partial v}dv\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix} du\,dv .$$