假設 $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$, $(x,y) \leftrightarrow (u,v)$ 座標是可以互換的, xy 座標系正交 (uv 座標系不一定正交)。

所以 微面積 $dA = dx\,dy$, $(*)$ $\begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv \\ dy = \frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv \end{cases}$ 應該都沒有疑慮。

那麼 , $$\begin{aligned} dA &= dx\,dy \\ &= (\tfrac{\partial x}{\partial u}\,du + \tfrac{\partial x}{\partial v}\,dv)(\tfrac{\partial y}{\partial u}\,du + \tfrac{\partial y}{\partial v}\,dv) \\ &= \tfrac{\partial x}{\partial u}\tfrac{\partial y}{\partial u}\,(du)^2 + (\tfrac{\partial x}{\partial u}\tfrac{\partial y}{\partial v} + \tfrac{\partial x}{\partial v}\tfrac{\partial y}{\partial u})\,du\,dv + \tfrac{\partial x}{\partial v}\tfrac{\partial y}{\partial v}\,(dv)^2 \text{ ,} \quad \text{這 . . . 對嗎?} \end{aligned}$$

$(*)$ 矩陣式 即

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix},$$

我們一直強調 differential 微變化量 的意義, 其中, $\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$ 是 <u>在一個點上小小的位移 ($\parallel$ 切方向)</u>, 用 xy 座標系 、uv 座標系 分別來表示罷了。故 $(*)$ 矩陣式顯示出: 矩陣 $J := \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$ 將 uv 系 向量 轉換成 xy 系 向量。

$$(\square) \quad \begin{cases} J\,\binom{1}{0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \end{pmatrix}, \quad \text{即: } uv \text{ 系的 } \binom{1}{0} \text{ 向量 實爲 } xy \text{ 系的 } \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \end{pmatrix} \\ J\,\binom{0}{1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \end{pmatrix}, \quad \text{即: } uv \text{ 系的 } \binom{0}{1} \text{ 向量 實爲 } xy \text{ 系的 } \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \end{cases}$$

又: xy 正交系的 $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \end{pmatrix}$ 與 $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$ 所夾平行四邊形面積爲 $\det(J) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$, 前述之 $(\square)$ 即:

$$\Big[uv \text{ 系的一個單位格}\Big] \text{ 爲 } \Big[xy \text{ 系的 } \det(J) \text{ 個單位格}\Big]$$

故 $\Big[\ uv$ 系的 $du\,dv$ 個單位格$\Big]$ 爲 $\Big[xy$ 系的 $\det(J)\cdot du\,dv$ 個單位格$\Big]$, 等於一小方格的面積 $dx\,dy$:

$$dA = dx\,dy = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}\,du\,dv$$

（位置固定） 表示法不同 $\Rightarrow$ 切割方式不同、即 “網目” 不同

還是不懂就看我手寫的, 上面有畫圖應該會更好懂。