Improper Integrals

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan\theta\, d\theta$ 是瑕積分 (因爲 $\tan\theta \xrightarrow{\theta\to\frac{\pi}{2}} +\infty$)
   $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-d(\cos\theta)}{\cos\theta} = \Big[\ln|\sec\theta|\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln(+\infty) - \ln 1 = +\infty$, 發散。

2. cot 和 tan 圖形在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上完全對稱, 所以由上題可知 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cot\theta\, d\theta$ 發散。不嫌囉嗦就看下面的吧:
   $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cot\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(\frac{\pi}{2}-\theta)\, d\theta \overset{令\ \phi:=\frac{\pi}{2}-\theta}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan\phi\, d\phi$, 同上題, 發散.

3. $\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{\sqrt{\pi-\theta}}\, d\theta$ 不算是瑕積分, 因爲 integrant 只有在 $\theta=\pi$ 沒定義, 不過 $\lim_{\theta\to\pi} \frac{\sin\theta}{\sqrt{\pi-\theta}} = \lim_{\theta\to\pi} \frac{\sin(\pi-\theta)}{\pi-\theta}\sqrt{\pi-\theta} = 1\cdot 0$ 存在, 即: integrant 在 $[0,\pi]$ 上的極限値處處皆存在, 所以這個定積分就相當於在有限閉區間上連續的函數的積分, 當然是收斂的。

4. $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{(\pi-2\theta)^{\frac{1}{3}}}\, d\theta$ 不算是瑕積分, 收斂。理由同 #3: $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{(\pi-2\theta)^{\frac{1}{3}}}$ 存在, 自己做。

5. $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{\frac{-1}{x}}}{x^2}\, dx$ 不算是瑕積分, 收斂。理由同 #3: $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{-1}{x}}}{x^2}$ 存在, 積分値爲 $e^{\frac{-1}{\ln 2}}$, 自己做。

6. $\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$ 是瑕積分, 因爲 integrant 在 0^+ 的極限値不存在 $(\to +\infty)$。收斂。(積分値爲 $2(\frac{-1}{e}+1)$)

7. $\int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{t}+\sin t}$ 是瑕積分, 因爲 integrant 在 0^+ 的極限値不存在 $(\to +\infty)$。
   $0 \le \int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{t}+\sin t} \le \int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}\Big|_0^{\pi}$, 所以 $\int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{t}+\sin t}$ 收斂。

8. $\int_0^1 \frac{dt}{t-\sin t}$ 是瑕積分, 因爲 integrant 在 0^+ 的極限値不存在 $(\to +\infty)$。
   $\int_0^1 \frac{dt}{t-\sin t} \ge \int_0^1 \frac{dt}{t} = \ln t\Big|_0^1 = 0 - (-\infty)$, 所以 $\int_0^1 \frac{dt}{t-\sin t}$ 發散。

9. $\int_0^2 \frac{dx}{1-x^2}$ 是瑕積分, 因爲 integrant 在 1 的極限値不存在, 原式即 $\lim_{a\to 1^-}\int_0^a + \lim_{b\to 1^+}\int_b^2$, 所以一定要拆成 $\int_0^1 + \int_1^2$ 才能判別。發散。

10. $\int_0^2 \frac{dx}{1-x}$ 是瑕積分, 因爲 integrant 在 1 的極限値不存在。理由、做法同#9。發散。

11. $\int_{-1}^1 \ln|x|\, dx$ 是瑕積分, 因爲 integrant 在 0 的極限値不存在。理由、做法同#9。收斂 (積分値爲 -2)。

12. $\int_{-1}^1 -x\ln|x|\, dx$ 不算是瑕積分, 因爲 integrant 在 0 的極限値存在 ($\to 0$, 自己做)。理由同 #3。收斂 (積分値爲 $\frac{-1}{4}+\frac{1}{4}=0$)。

$$-\infty < a < b < \infty,\ c \in [a,b]\text{ 。} \int_a^b \frac{dx}{(x-c)^p} = \left.\tfrac{(x-c)^{1-p}}{1-p}\right|_a^b \text{ 存在} \iff p < 1\text{ 。} \qquad (1)$$

1. $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}$ 是瑕積分, 因爲 integrant 在 1^+ 的極限值不存在 ($\to +\infty$)。積分值存在。(1)

2. $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{4}{3}}}$ 是瑕積分, 因爲 integrant 在 1^+ 的極限值不存在 ($\to +\infty$)。積分值不存在。(1)

3. $\displaystyle\int_3^{10} \frac{dx}{\sqrt{x-3}}$ 是瑕積分, 因爲 integrant 在 3^+ 的極限值不存在 ($\to +\infty$)。積分值存在。(1)

4. $\displaystyle\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{9-x}}$ 是瑕積分, 因爲 integrant 在 9^- 的極限值不存在 ($\to +\infty$)。積分值存在。(1)

5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 是瑕積分, 因爲 integrant 在 1^- 的極限值不存在 ($\to +\infty$)。積分值存在。≈(1)

6. $\displaystyle\int_{100}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$ integrant 在 ∞ 處之極限值爲 1, 故積分值不存在。 (原式 $= \sqrt{1+x^2}\Big|_{100}^{\infty} = +\infty$)

7. $\displaystyle\int_{-1}^3 \frac{dx}{x^3}$ 不存在。(1) 不存在。 (原式 $= \frac{1}{-2}\cdot x^{-2}\Big|_{-1}^{0} + \Big|_{0}^{3} = (-\infty) + (+\infty)$, undefined)

8. $\displaystyle\int_5^{-5} \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}}$ 存在。(1) (原式 $= 2\cdot 3\cdot x^{\frac{1}{3}}\Big|_5^0 = -6\cdot 5^{\frac{1}{3}}$)

9. $\displaystyle\int_{-1}^{128} x^{\frac{-5}{7}}\, dx$ 存在。(1) (原式 $= \frac{7}{2}x^{\frac{2}{7}}\Big|_{-1}^{0} + \Big|_{0}^{128} = \frac{7}{2}(0-1+4-0) = \frac{21}{2}$)

10. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\, dx$ 存在。≈(1) (原式 $= \frac{-1}{2}\frac{3}{2}(1-x^2)^{\frac{2}{3}}\Big|_0^1 = \frac{3}{4}$)

11. $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{(2-3x)^{\frac{1}{3}}}$ 存在。(1) (原式 $= \frac{-1}{3}\frac{3}{2}(2-3x)^{\frac{2}{3}}\Big|_0^{\frac{2}{3}} + \Big|_{\frac{2}{3}}^{4} = \frac{-1}{2}(0-2^{\frac{2}{3}}+10^{\frac{2}{3}}-0) = \frac{2^{\frac{2}{3}}-10^{\frac{2}{3}}}{2} < 0$)

12. $\displaystyle\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} \frac{x}{(16-2x^2)^{\frac{2}{3}}}\, dx$ 存在。≈(1) (原式 $= \frac{-1}{4}\frac{3}{1}(16-2x^2)^{\frac{1}{3}}\Big|_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} = \frac{3}{4}\cdot 6^{\frac{1}{3}}$)

13. $\displaystyle\int_0^{-4} \frac{x}{16-2x^2}\, dx$ 不存在。≈(1) (原式 $= \frac{-1}{4}\ln|2x^2-16|\,\Big|_0^{-4} = +\infty$)

14. $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\, dx$ 存在。≈(1) (原式 $= \sqrt{9-x^2}\Big|_3^0 = 3$)

15. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x+1)^{\frac{4}{3}}}$ 不存在。(1) (原式 $= -3\cdot(x+1)^{\frac{-1}{3}}\Big|_{-2}^{-1} = +\infty$)

16. $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{x^2+x-2}$ 不存在。≈(1) (原式 $= \int_0^3 \frac{dx}{(x+2)\underline{(x-1)}}$)