I 爲單一區間, 定義 $\begin{array}{l} f^+(x) := \max\limits_{x\in I}\{f(x),0\} \geq 0, \\ f^-(x) := -\min\limits_{x\in I}\{f(x),0\} \geq 0, \end{array}$ 若 $\displaystyle\int_I f^+ < \infty$ 且 $\displaystyle\int_I f^- < \infty$, 則 則稱 f *is integrable on* I (f 在 I 上可積, 或記做 $f \in L^1(I)$), 且定積分 $\displaystyle\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-$。

$$\Big(f \in L^1(I) \overset{?}{\Longleftrightarrow} \int_I |f| < \infty\Big)$$

Improper Integrals (瑕積分)

以下任一情形的定積分 $\displaystyle\int_I f(x)\,dx$ 稱爲“瑕積分”:

A) $|I| < \infty$, 存在 $c \in I$ 使得 $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \pm\infty$;

B) $|I| = \infty$, 如 $[a,\infty)$, $(-\infty,b]$ 或 $(-\infty,\infty)$;

瑕積分的定義及求法, 和求一般的定積分的方式差不多:

A) $|I| < \infty$, f 在 $I = [a,b]$ 上連續 除了一處 $c \in (a,b)$ 使得 $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \pm\infty$, 則:

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{\gamma\to c^-}\int_a^\gamma f(x)\,dx + \lim_{\gamma\to c^+}\int_\gamma^b f(x)\,dx$$ — 假使等號右邊的兩極限皆存在。

B) $|I| = \infty$, 如 $I = [a,\infty)$、$(-\infty,b]$ 或 $(-\infty,\infty)$, f 在 I 上連續, 則:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{\beta\to\infty}\int_a^\beta f(x)\,dx,$$ — 假使等號右邊的極限存在。

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{\alpha\to-\infty}\int_\alpha^b f(x)\,dx,$$ — 假使等號右邊的極限存在。

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{\alpha\to-\infty}\int_\alpha^c f(x)\,dx + \lim_{\beta\to\infty}\int_c^\beta f(x)\,dx,$$ — 假使對任意 $c \in \mathbb{R}$ 而言, 等號右邊的兩極限皆存在。

Example 1 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ 是瑕積分, 本來應該這麼寫

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx &= \lim_{\beta\to\infty}\int_1^\beta \frac{1}{x}\,dx \\ &= \lim_{\beta\to\infty}\Big[\ln x\Big]_1^\beta \\ &= \lim_{\beta\to\infty}(\ln\beta - \ln 1) \\ &= +\infty, \end{aligned}$$

無論如何都要算不定積分。不過由於上式的極限值顯而易見, 這樣寫也就可以了

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big|_1^\infty = \ln(+\infty) - \ln 1 = +\infty,$$

並不算是亂跳步驟。

Example 2 $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$ 是瑕積分, 因爲 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$。

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln x\,dx &= \lim_{\alpha\to 0^+}\int_\alpha^1 \ln x\,dx\\ &= \lim_{\alpha\to 0^+}\Big[x\ln x - x\Big]_\alpha^1\\ &= -1 - \lim_{\alpha\to 0^+}\alpha\ln\alpha \text{ , 這個極限值並非顯而易見:}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to 0^+}\alpha\ln\alpha &= \lim_{\alpha\to 0^+}\frac{\ln\alpha}{\frac{1}{\alpha}} \quad (\tfrac{-\infty}{\infty}\text{ form})\\ &= \lim_{\alpha\to 0^+}\frac{\frac{1}{\alpha}}{\frac{-1}{\alpha^2}} \quad \text{by } \textit{L'Hôpital rule}\\ &= \lim_{\alpha\to 0^+}(-\alpha) = 0,\end{aligned}$$

最後得到 $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx = -1 - \lim_{\alpha\to 0^+}\alpha\ln\alpha = -1$ 。

有時即使不去算不定積分, 還是至少可以透過“**比較法**”知道 瑕積分 A 收斂與否 —— 與一個積分區間相同, 且已知收斂或發散的 瑕積分 B 做比較。前提是, 你必須先對 A 的收斂/發散有所感覺, 方向正確才有可能找到一個適當的 B。舉凡任何比較法皆是如此。我們在極限已經用到, 定積分、瑕積分、無窮數列/級數、任何與極限有關的比較法皆是依此原則。

Example 3 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx$ 、$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ 皆爲瑕積分, 而 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 0-(-e^{-0}) = 1$, 並不難求。雖然 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ 的不定積分不會算, 可用“比較法”:

$$\begin{array}{r} e^{-x^2}\text{、}e^{-x} > 0\ \forall x,\\ \text{且 } e^{-x^2} \le e^{-x}\ \forall x \ge 1,\end{array} \Longrightarrow 0 < \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx \le \int_1^\infty e^{-x}\,dx < \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1, \text{ 所以}$$

$$\begin{aligned}0 < \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx &= \int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx\\ &\le \underbrace{\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx}_{<\infty} + \underbrace{\int_1^\infty e^{-x}\,dx}_{<1} < \infty.\end{aligned}$$

這個積分值在統計上有用的。等學過重積分後再講如何算。

Example 4 若 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx < \infty$, p 爲何?

$$\int \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \ln x \text{ as } p = 1;\\ \frac{1}{1-p}x^{1-p} \text{ as } p \ne 1;\end{cases}$$

$$\therefore \int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \ln x\Big|_1^\infty = +\infty \text{ as } p = 1;\\ \begin{cases} \frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_1^\infty \overset{p>1}{=} \frac{1}{1-p}(0-1) = \frac{1}{p-1};\\ \frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_1^\infty \overset{p<1}{=} \frac{1}{1-p}(\infty-1) = +\infty;\end{cases}\end{cases}$$

即: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx < \infty \iff p > 1$。這個結果, 在無窮級數審斂法還會用到要, 不可不知。

Example 5 若 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx < \infty$, p 爲何?

$$\text{其不定積分與前例相同: } \int \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \ln x \text{ as } p = 1; \\ \frac{1}{1-p}x^{1-p} \;\text{ as } p \neq 1; \end{cases}$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} = \ln x\Big|_0^1 = +\infty \;\text{ as } p = 1; \\ \begin{cases} \frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_0^1 \overset{p \geq 1}{=} \frac{1}{1-p}(1-\infty) = +\infty; \\ \frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_0^1 \overset{p \leq 1}{=} \frac{1}{1-p}(1-0) = \frac{1}{1-p}; \end{cases} \end{cases}$$

即: $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx < \infty \iff p < 1$。