Dot Product(in $\mathbb{R}^n$), Cross Products(in $\mathbb{R}^3$ only)

內積 (dot product/inner product): 令 $\begin{array}{c}\mathbf{u}=(u_1,\cdots,u_n)\in\mathbb{R}^n,\\ \mathbf{v}=(v_1,\cdots,v_n)\in\mathbb{R}^n,\end{array}$ 定義 $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}$, 或 $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle\overset{\text{def}}{=}u_1v_1+\cdots+u_nv_n$, 讀作 "**u** dot **v**", 爲一純量; (這樣定義的內積, 會與你所熟知的"直角座標系所定的向量長度"一致)

很明顯地, $\begin{array}{l}\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle=\langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle,\\ \langle\mathbf{u},-\mathbf{v}\rangle=-\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle,\\ \langle\mathbf{u},\mathbf{v}+\mathbf{w}\rangle=\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+\langle\mathbf{u},\mathbf{w}\rangle,\end{array}$ $\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle\geq 0\ \forall\,\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 。所以我們又可

以內積定義出向量的長度, 以 $\|\cdot\|$ 符號表示: $\|\mathbf{u}\|^2=\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle=u_1^2+\cdots+u_n^2$。

以內積定義出向量之間的夾角 θ: $\cos\theta:=\frac{\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$, 即 $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle=\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta$。$\therefore\ \langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle=0\iff\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$,。

因此, 根據內積的性質, 可以定義 **u** 到 **v** 的投影((*orthogonal*)*projection* *of* **u** *onto* **v**):

$$proj_{\mathbf{v}}\mathbf{u}=\|\mathbf{u}\|\cos\theta\,\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}=\frac{\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{v}\|}\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}=\frac{\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle}{\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle}\mathbf{v}.$$

令平面 $H\subset\mathbb{R}^n$ 的法向量 (normal) 爲 **n**, **p** 爲 H 上一點, 則方程式 $\langle\mathbf{x}-\mathbf{p},\mathbf{n}\rangle=0$ 定義出 H, 即 $H=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n:\langle\mathbf{x}-\mathbf{p},\mathbf{n}\rangle=0,\Leftrightarrow\langle\mathbf{x},\mathbf{n}\rangle=\langle\mathbf{p},\mathbf{n}\rangle\}$。所以 H 可以寫成 $*(x_1-*)+\cdots*(x_n-*)=0$ 或 $*x_1+\cdots+*x_n=*$ 的樣子。

直線 $L\subset\mathbb{R}^n$ 和 **v** 平行, **p** 爲 L 上一點, 則 $L=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n:\mathbf{x}-\mathbf{p}=t\mathbf{v},t\in\mathbb{R}\}$, 即 $L=\{\mathbf{p}+t\mathbf{v}:\ t\in\mathbb{R}\}$。

Theorem 1 (三角不等式)**.** $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|\leq\|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{v}\|$。

Theorem 2 (柯西不等式)**.** $|\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle|\leq\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$, 即 $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle^2\leq\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle$。

Theorem 3 (平行四邊形定理)**.** $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2+\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2=2(\|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2)$。

Theorem 4 (畢氏定理)**.** 若 $\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_m\in\mathbb{R}^n$ 互相垂直, 則 $\|\mathbf{x}_1+\cdots+\mathbf{x}_m\|^2=\|\mathbf{x}_1\|^2+\cdots+\|\mathbf{x}_m\|^2$。

外積 (cross product) $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$, $\mathbf{u}\times\mathbf{v}\overset{\text{def}}{=}\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\end{vmatrix}=(u_2v_3-v_2u_3)\mathbf{i}+(v_1u_3-u_1v_3)\mathbf{j}+(u_1v_2-v_1u_2)\mathbf{k}$,

爲一向量, 讀作 "**u** cross **v**", 其中 $\begin{cases}\mathbf{i}=(1,0,0),\\ \mathbf{j}=(0,1,0),\\ \mathbf{k}=(0,0,1),\end{cases}$ 也可分別記作 $\begin{cases}\hat{e}_1\\ \hat{e}_2\\ \hat{e}_3\end{cases}$ 。

外積遵循所謂的"右手定則": 若 **u** 到 **v** 爲逆時針方向, $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 爲指出鐘面的向量。另外, 可以證明下列事實:

令 θ 爲 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 間的夾角。則 $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|=\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\sin\theta$。

$$\begin{cases}\mathbf{u}\times\mathbf{u}=\mathbf{0}\\ \mathbf{v}\times\mathbf{u}=-(\mathbf{u}\times\mathbf{v}),\\ (\mathbf{u}\times\mathbf{v})\perp\mathbf{u}、\mathbf{v},\end{cases}\quad\begin{cases}\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k},\\ \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i},\quad\cdots\\ \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j},\end{cases}$$

簡單例子 ($\mathbb{R}^3$)

Example 1. 通過 $(1,2,3)$、垂直於 $(4,5,6)$ 的平面方程式爲 $\langle(x,y,z)-(1,2,3),(4,5,6)\rangle=0$, $\begin{array}{l}\Leftrightarrow 4(x-1)+5(y-2)+6(z-3)=0\\ \Leftrightarrow x+2y+3z=32\end{array}$ 。

Example 2. 若平面 $H = \{\mathbf{x} : \langle \mathbf{x}, \mathbf{n}\rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{n}\rangle\}$ 的 $\mathbf{n}$ 為單位法向量 (*unit normal*), 則原點到 H 的距離為 $\left\| proj_{\mathbf{n}}\mathbf{p}\right\| = \left\| \frac{\langle \mathbf{p}, \mathbf{n}\rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle}\mathbf{n}\right\| = \left| \langle \mathbf{p}, \mathbf{n}\rangle \right|$。故 兩平行面 $\begin{cases} \langle \mathbf{x}, \mathbf{n}\rangle = c \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{n}\rangle = d \end{cases}$ 之間的距離為 $|c-d|$。

例如, $\begin{cases} 2x+4y=3 \\ x+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y = \frac{3}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y = 0 \end{cases}$, 故 $\begin{cases} 2x+4y=3 \\ x+2y=0 \end{cases}$ 之間的距離為 $\frac{3}{2\sqrt{5}}$。

Example 3. $H : ax+by+cz=d$. $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0)$ 到 H 的距離 $\mathscr{D}$ 為何?

$H = \{(x,y,z) | \langle (x,y,z), (a,b,c)\rangle = d\}$。令 $\mathbf{n} = (a,b,c)$, normal of H, 則我們可以假設 通過 $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0)$ 與 H 垂直的線 與 H 交於 $\mathbf{p} + t\mathbf{n}$, 很清楚地, $\mathscr{D}$ 等於 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{p}+t\mathbf{n}$ 的距離, 即 $\|\mathbf{p} - (\mathbf{p}+t\mathbf{n})\| = |t|\,\|\mathbf{n}\|$: $a(x_0+ta)+b(y_0+tb)+c(z_0+tc)=d, \Leftrightarrow t = \frac{ax_0+by_0+cz_0-d}{a^2+b^2+c^2}$; $\therefore |t|\,\|\mathbf{n}\| = \frac{|ax_0+by_0+cz_0-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$。這種想法還是有點暴力+ 囉唆。

Example 4. 這一個就比較一般 且漂亮。同前例, 若 $\mathbf{q}$ 為 H 上任意一點, 則 $\mathbf{p}$ 到 H 的距離 $\mathscr{D}$ 等於 $(\mathbf{p}-\mathbf{q})$ 投影 到 $\mathbf{n}$ 的長度:

$$\left\| proj_{\mathbf{n}}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\right\| = \left\| \frac{\langle \mathbf{p}-\mathbf{q}, \mathbf{n}\rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle}\mathbf{n}\right\| = \frac{|\langle \mathbf{p}, \mathbf{n}\rangle - \langle \mathbf{q}, \mathbf{n}\rangle|}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{|\langle \mathbf{p}, \mathbf{n}\rangle - d|}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{|ax_0+by_0+cz_0-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Example 5. 線 $L_1 : \{\mathbf{p} + s\mathbf{u}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}\}$ 到線 $L_2 : \{\mathbf{q} + t\mathbf{v}, \mathbf{t} \in \mathbb{R}\}$ 的距離 $\mathscr{D}$ 為何?

道理同前例。$\therefore \mathscr{D}$ 為 $proj_{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$ 的長度。($\mathbf{n} := \mathbf{u} \times \mathbf{v}$)

Example 6. 點 $\mathbf{p}$ 到線 $L : \{\mathbf{q} + t\mathbf{v}, \mathbf{t} \in \mathbb{R}\}$ 的距離 $\mathscr{D}$ 為何?

令 $\mathbf{u}$ 為 $\mathbf{p}-\mathbf{q}$ 到 L 的投影, 即 $\mathbf{u} := proj_{\mathbf{v}}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) = \frac{\langle \mathbf{p}-\mathbf{q}, \mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle}\mathbf{v}$, 則 $\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|$ 為斜邊, $\|\mathbf{u}\|$ 與 $\mathscr{D}$ 為兩股, $\therefore \mathscr{D}^2 = \|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|^{\mathbf{2}} - \|\mathbf{u}\|^{\mathbf{2}} = \|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|^{\mathbf{2}} - \left\langle \mathbf{p}-\mathbf{q}, \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right\rangle^{\mathbf{2}}$

3-D 空間中的曲面

同學們至少要對 繞座標軸旋轉而得的曲面、二次曲面標準式 有相當的認識, 但不要死記。

- 方程式 $f(y,z)=0$ 所定義之曲線 C 在 y-z 平面上, 放到 x-y-z 空間, 並對 z-軸旋轉 所劃出的曲面S, 就是 原方程式中 y^2 被 x^2+y^2 取代後 得到的新方程式 所定義的。

  例如, 曲線 $C : z = y^2$在 y-z 平面上, 放到 x-y-z 空間, 繞 z 軸旋轉 劃出曲面 S。任給一原在 C上的點 $P = (y_0, z_0)$, 即 $z_0 = {y_0}^2$, 則 P 繞 z 軸所劃出的圓半徑為 $r = |y_0|$, 並且在這個圓上的任意點 (x, y, z_0)(在 S 上), 都具有 $x^2+y^2 = r^2 = {y_0}^2$的性質 (當然 P 也不例外), 意即:$\begin{cases} z_0 = x^2+y^2, \\ x^2+y^2 = {y_0}^2 \end{cases}$, 所以,

  (y,z) 在曲線 C上 $\Leftrightarrow z = y^2$;
  $(0,y,z)$ 在曲線 C上 $\Leftrightarrow z = 0^2 + y^2$; (註: 這個方法和 $f=0$ 是否為二次方程無關 !)
  (x,y,z) 在曲面 S上 $\Leftrightarrow z = x^2+y^2$。

- 對一般的方程, 如果還是想不出它所定義的出曲面形狀, 建議至少用 $\begin{cases} x = a, \\ y = b, \\ z = c, \end{cases}$ 砍三刀看截面圖 (cross-sections) (a, b, c 不一定取 $0,0,0$, 以砍到 (相交) 為準)。如果還是想不出來, 那就用平行於 x-y平面 的等距

面 $\left\{\begin{array}{l} z=z_0, \\ z=z_0+\triangle z \\ z=z_0+2\triangle z \\ z=z_0+3\triangle z \\ \quad\vdots \end{array}\right.$ 多砍幾刀, 看全部的截面 (就是 level curves) 長什麼樣子。這些 level curves 投影到 x-y平面上, 就叫做 *contour diagram*, 上面要標示每一條曲線的高度才有用處 (地圖上的"等高線")。

二次曲面 由二次多項式方程定義, i.e. $f(x,y,z)=0$, f : polynomial of degree ≤ 2,

一般式 : $*x^2+*y^2+*z^2+*xy+*yz+*zx+*x+*y+*z=*$,
可經由 **旋轉**(**去交乘項**)、**座標平移**(**去一次項**) 而變換成
標準式 : $Ax^2+By^2+Cz^2+ax+by+cz=d$, 其中, 每個變量的平方項與其一次項不會同時出現,
即 $Aa=Bb=Cc=0$

如果已經了解前一點: 繞某座標軸旋轉的過程, 則, 看到某二次曲面標準式裡頭有兩個同號的平方項 (曲面一), 就先想像 曲面一 是 曲面二 (那兩個平方項係數改成一樣, 但符號不變) 沿這兩個變量的方向分別伸縮而得, 再想像 曲面二 是 曲線三 繞剩下的那個座標軸而得的, 這樣便可輕易地想出 曲面一 的形狀了。

例如, $-9x^2-\dfrac{y^2}{16}+z^2=25$ 曲面一
(elliptic hyperboloid of 2 sheets)

$\Big\uparrow$ $x{:=}3x$ shrink, $y{:=}\frac{y}{4}$ stretch

$-(x^2+y^2)+z^2=25$ 曲面二
(hyperboloid of 2 sheets)

$\nearrow$ rotate about z-axis / $\nwarrow$ rotate about z-axis

$-x^2+z^2=25$ (hyperbola 開口朝 z-軸上下) or $-y^2+z^2=25$ (hyperbola 開口朝 z-軸上下) 曲線三

如何判斷 $z=q(x,y)$ **類型的二次曲面** $\big(q(x,y)$: polynomial of degree $\leq 2\big)$, 即前面說的二次多項式方程中, 某變量 (在此為 z) 有一次項 沒二次項 的情況。如果 $q(x,y)$ 可以寫成兩個完全平方的和

$$q(x,y)=\alpha\diamondsuit^2+\beta\heartsuit^2,$$

$\diamondsuit$、$\heartsuit$ 分別長得是 $(*x+*y)$ 的樣子、並且不成比例 (線性無關), 則有以下結論:

α、β 同號,	則 $z=q(x,y)$ 為	paraboloid 拋物面	例如: $z=x^2+y^2$ (對稱於 $x=0$, $y=0$) $z=(x+y)^2+(x-y)^2$ (對稱於 $x+y=0$, $x-y=0$) ......
α、β 異號,	則 $z=q(x,y)$ 為	saddle 鞍面	例如: $z=x^2-y^2$ (對稱於 $x=0$, $y=0$), $z=(x+y)^2-(x-y)^2$ (對稱於 $x+y=0$, $x-y=0$) ......
$\alpha\neq 0$、$\beta=0$ 或 $\alpha=0$、$\beta\neq 0$,	則 $z=q(x,y)$ 為	parabolic cylinder 拋物形柱面	例如: $z=x^2$ (對稱於 $x=0$) $z=(x+y)^2$ (對稱於 $x+y=0$) ......

詳情如下。

如果 $q(x,y) := Ax^2+Bxy+Cy^2$, 則可以經由『配方法』得到以下結果:

$$\begin{aligned} q(x,y) &= Ax^2+Bxy+Cy^2 \\ &= A\left[x^2+\tfrac{By}{A}x \qquad\right]+Cy^2 \\ &= A\left[x^2+\tfrac{By}{A}x+(\tfrac{By}{2A})^2\right]+Cy^2-(\tfrac{By}{2A})^2 \\ &= A\left[(x+\tfrac{B}{2A}y)^2-\left(B^2-4AC\right)\left(\tfrac{1}{A}y\right)^2\right] \\ &= A\left[\diamondsuit^2-\blacktriangle\heartsuit^2\right], \end{aligned}$$

其中 $\blacktriangle := B^2-4AC$, 而且兩個 $\diamondsuit$、$\heartsuit$ 也都長得是 $(*x+*y)$ 的樣子, 所以

$B^2-4AC<0$, $\iff$ 兩個同號平方項, $\Longrightarrow z=q(x,y)$ 爲 paraboloid 抛物面
$B^2-4AC>0$, $\iff$ 兩個異號平方項, $\Longrightarrow z=q(x,y)$ 爲 saddle 鞍面
$B^2-4AC=0$, $\iff$ 只有一個平方項, $\Longrightarrow z=q(x,y)$ 爲 parabolic cylinder 抛物形柱面

如何看出 對稱平面/對稱軸? 座標的意義就已經告訴你了。用粗淺的話來講, 例如,

$z=x^2$ 就是 "到 $z=0$ 的距離 等於 到 $x=0$ 的距離的平方", 所以圖形對稱於 $x=0$ 平面。

$z=x^2+4y^2$ 就是 "[到 $z=0$ 的距離] 等於 [到 $x=0$ 距離的平方] 加上 [到 $y=0$ 距離平方的四倍]", 所以圖形對稱於 $x=0, y=0$ 兩平面。

$z=(x+y)^2, \Leftrightarrow z=2(\frac{x+y}{\sqrt{2}})^2$, 就是 "[到 $z=0$ 的距離] 等於 [到 $x+y=0$ 距離平方的兩倍]", 所以圖形對稱於 $x+y=0$ 平面。

$z=(x+y)^2+4(x-y)^2, \Leftrightarrow z=2(\frac{x+y}{\sqrt{2}})^2+8(\frac{x-y}{\sqrt{2}})^2$, 就是 "[到 $z=0$ 的距離] 等於 [到 $x+y=0$ 距離平方的兩倍] 加上 [到 $x-y=0$ 距離平方的八倍]", 所以圖形對稱於 $x+y=0, x-y=0$ 兩平面。

座標變換

Cylindrical coordinate:

r: z 軸到 (x,y,z) 的距離
θ: 正 x-軸到 $(x,y,0)$ 的夾角

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z,\ \text{不變} \end{cases}。$$

Spherical coordinate:

ρ: 原點到 (x,y,z) 的距離
ϕ: 正 z-軸到 (x,y,z) 的夾角
θ: 正 x-軸到 $(x,y,0)$ 的夾角

$$\begin{cases} x=\rho\sin\phi\cos\theta \\ y=\rho\sin\phi\sin\theta \\ z=\rho\cos\phi \end{cases}。$$