

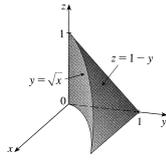
微積分 6月8日演習課後小考解答

(滿分: 25)

一. $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x,y,z) dz dy dx$

$= \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{y^2} f(x,y,z) dx dz dy$

$= \int_0^1 \int_0^{(1-z)^2} \int_{\sqrt{x}}^{1-z} f(x,y,z) dy dx dz$



二. 計算半徑為 a 的圓盤內所有點到圓心的平均距離。

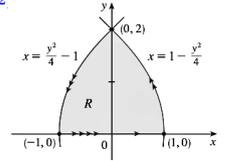
平均 = $\int_D r \frac{dA}{A} \quad (+1) = \frac{\int_0^a r \cdot (2\pi r dr)}{\pi a^2} \quad (+2)$
 $= \frac{\frac{a^3}{3} \cdot 2\pi}{\pi a^2} \quad (+1) = \frac{2a}{3} \quad (+1)$

三. R 是 $x \geq \frac{y^2}{4} - 1$ 、 $x \leq -(\frac{y^2}{4} - 1)$ 、 $y \geq 0$ 所交之區域。以 $\begin{cases} x = u^2 - v^2 \\ y = 2uv \end{cases}$ 變數變換求 $\int_R y dA$ 。

$\begin{matrix} dx = 2u du - 2v dv \\ dy = 2v du + 2u dv \end{matrix}$, $\text{即 } \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$, $\Rightarrow dA = dx dy = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} du dv \quad (+2)$

$\therefore \int_R y dA = \int_0^1 \int_0^1 2uv \cdot 4(u^2 + v^2) du dv \quad (+1+1+1) = \int_0^1 [2u^4v + 4u^2v^3]_0^1 du$

$= \int_0^1 (2v + 4v^3) dv \quad (+1) = [v^2 + v^4]_0^1 = 2 \quad (+1)$



禁止交談、傳遞物品、掀示考卷、放大畫面、四處張望 作弊者、疑似作弊 警告後再犯者，學期成績零分。

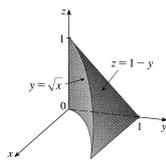
微積分 6月8日演習課後小考解答

(滿分: 25)

一. $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x,y,z) dz dy dx$

$= \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{y^2} f(x,y,z) dx dz dy$

$= \int_0^1 \int_0^{(1-z)^2} \int_{\sqrt{x}}^{1-z} f(x,y,z) dy dx dz$



二. 計算半徑為 a 的圓盤內所有點到圓心的平均距離。

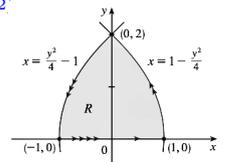
平均 = $\int_D r \frac{dA}{A} \quad (+1) = \frac{\int_0^a r \cdot (2\pi r dr)}{\pi a^2} \quad (+2)$
 $= \frac{\frac{a^3}{3} \cdot 2\pi}{\pi a^2} \quad (+1) = \frac{2a}{3} \quad (+1)$

三. R 是 $x \geq \frac{y^2}{4} - 1$ 、 $x \leq -(\frac{y^2}{4} - 1)$ 、 $y \geq 0$ 所交之區域。以 $\begin{cases} x = u^2 - v^2 \\ y = 2uv \end{cases}$ 變數變換求 $\int_R y dA$ 。

$\begin{matrix} dx = 2u du - 2v dv \\ dy = 2v du + 2u dv \end{matrix}$, $\text{即 } \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$, $\Rightarrow dA = dx dy = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} du dv \quad (+2)$

$\therefore \int_R y dA = \int_0^1 \int_0^1 2uv \cdot 4(u^2 + v^2) du dv \quad (+1+1+1) = \int_0^1 [2u^4v + 4u^2v^3]_0^1 du$

$= \int_0^1 (2v + 4v^3) dv \quad (+1) = [v^2 + v^4]_0^1 = 2 \quad (+1)$



禁止交談、傳遞物品、掀示考卷、放大畫面、四處張望 作弊者、疑似作弊 警告後再犯者，學期成績零分。