微積分　6 月 5 日 演習課 前 小考 解答　　(滿分: 18)

一. (9) $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3+1}\,dy\,dx$

$= \int_0^2 \int_0^{y^2} \frac{1}{y^3+1}\,dx\,dy$ (1 + 2/1) $= \int_0^2 \frac{1}{y^3+1}\cdot y^2\,dy$ (+1)　令 $u = y^3+1$ (+1), $\Rightarrow du = 3y^2\,dy$

$= \frac{1}{3}\int_1^9 \frac{1}{u}\cdot du$ (+1) $= \frac{1}{3}\Big[\ln u\Big]_1^9$ (+1) $= \frac{2}{3}\ln 3$ (+1)

二. (9) 求 $D: 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}$、密度函數爲 $\sqrt{x^2+y^2}$ 之半圓薄片 之質量中心。

$M = \int_D (x^2+y^2)\,dA = \int_0^1 r^2\cdot \pi r\,dr$ (+1) $= \frac{\pi}{3}$ (+1) ,

$\bar{x} = \int_D x(x^2+y^2)\,dA\ /M = \int_0^1\int_0^\pi r\cos\theta\cdot r^2\cdot r\,d\theta\,dr\ /M$ (+1) $= 0$ (+1) ($\because [0,\pi]$ 是 cos 的半週期 或對稱性)

$\bar{y} = \int_D y(x^2+y^2)\,dA\ /M = \int_0^1\int_0^\pi r\sin\theta\cdot r^2\cdot r\,d\theta\,dr\ /M$ (+1) $= \int_0^1 r^3\,dr\cdot\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta\ /M$ (+1)

$= \frac{1}{4}\cdot 2\ /M$ (1+1) $= \frac{3}{2\pi}$ (+1)

禁止交談、傳遞物品、掀示考卷、放大畫面、四處張望 ..... 做弊者、疑似做弊 警告後再犯者, 學期成績零分。

微積分　6 月 5 日 演習課 後 小考 解答　　(滿分: 19)

一. (9) $\int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx\,dy$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin x} \cos x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dy\,dx$ (1 + 2/1) $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sqrt{1+\cos^2 x}\cdot\sin x\,dx$ (+1),　令 $u = 1+\cos^2 x$ (+1), $\Rightarrow du = -2\cos x\sin x\,dx$,

$= \int_2^1 \frac{-1}{2}\sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{u}\,du$ (+1) $= \frac{1}{2}\Big[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big]_1^2$ (+1) $= \frac{1}{3}(\sqrt{8}-1)$ (+1)

二. (10) 求 x-y 平面以上、$z = x^2+y^2$ 以下、$x^2+y^2 = 2x$ 以內 區域 的體積。

令 D: $x^2+y^2 \le 2x \Leftrightarrow r \le 2\cos\theta$ (+1)　$\subseteq \mathbb{R}^2$, $z = 0$ 到 $z = x^2+y^2$ 之高度差 爲 x^2+y^2, 則

體積 $\int_D (x^2+y^2)\,dA = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta} r^2\cdot r\,dr\,d\theta$ (1 + 2/1) $= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big[\frac{1}{4}r^4\Big]_0^{2\cos\theta} d\theta$ (+1) $= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\,d\theta$ (+1)

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+2\cos 2\theta + \frac{1+\cos 4\theta}{2})\,d\theta$ (+2) $= 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$ (+1)

禁止交談、傳遞物品、掀示考卷、放大畫面、四處張望 ..... 做弊者、疑似做弊 警告後再犯者, 學期成績零分。