微積分　5 月 22 日 演習課 前 小考 解答　　（滿分: 26）

請一律用: 極值發生處 $d\mathbf{x}$ 必須具有的特性 去做, 用暴力代入的方式不給分

一. **(12)**　max/min　$f(x,y,z)=xyz$

subject to　$xy+2yz+2xz-12=0 \Leftrightarrow g(x,y,z)=0$

$x,y,z \ge 0$

若 $xyz=0$ 則 $f(x,y,z)=0$ 爲極小值 (+1)。之後皆假設 $x,y,z\neq 0$。

極值發生處 ∇f、∇g 線性相關, 即 $\frac{yz}{2z+y}=\frac{xz}{2z+x}=\frac{xy}{2x+2y}$ $\left(\frac{+2}{+2}\right)$ $\Leftrightarrow \frac{xyz}{2xz+xy}=\frac{xyz}{2yz+xy}=\frac{xyz}{2xz+2yz}$ (+2) 分母必相同

$\Rightarrow x=y,\ y=2z$ (+2) $\overset{\text{代入 } g=0}{\Longrightarrow} 12z^2-12=0 \Rightarrow z=1, x=y=2$ (+2) 。$f(2,2,1)=4$ 是極大值 (+1)。

二. **(14)**　max/min　$f(x,y,z)=x+2y+3z$

subject to　$x-y+z-1=0 \Leftrightarrow g(x,y,z)=0$

$x^2+y^2-1=0 \quad \Leftrightarrow h(x,y,z)=0$

極值發生處 ∇f、∇g、∇h 線性相關, 即 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = 0$ $\begin{pmatrix} +1 \\ +1 \\ +1 \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow 5x+2y=0$ (+2)

$\Leftrightarrow y=-\frac{5}{2}x \overset{\text{代入 } h=0}{\Longrightarrow} \frac{29}{4}x^2=1 \Rightarrow x=\pm\frac{2}{\sqrt{29}}$ (+2), $y=\mp\frac{5}{\sqrt{29}}$ (+2), $\overset{\text{代入 } g=0}{\Longrightarrow} z=1\mp\frac{7}{\sqrt{29}}$ (+2)。

$f(\frac{2}{\sqrt{29}},\frac{-5}{\sqrt{29}},1-\frac{7}{\sqrt{29}})=3+\frac{2-10-21}{\sqrt{29}}=3-\sqrt{29}$ (+1)　是極小值,

$f(\frac{-2}{\sqrt{29}},\frac{5}{\sqrt{29}},1+\frac{7}{\sqrt{29}})=3+\frac{-2+10-21}{\sqrt{29}}=3+\sqrt{29}$ (+1)　是極大值。 (+1)

禁止交談、傳遞物品、掀示考卷、放大畫面、四處張望 .... 做弊者、疑似做弊 警告後再犯者, 學期成績零分。

微積分　5 月 22 日 演習課 後 小考 解答　　（滿分: 22）

請一律用: 極值發生處 $d\mathbf{x}$ 必須具有的特性 去做, 用暴力代入的方式不給分

一. **(8)**　max/min　$f(\mathbf{x})=x_1+\cdots+x_n$

subject to　$x_1^2+\cdots+x_n^2-1=0 \Leftrightarrow g(\mathbf{x})=0$

極值發生處 ∇f、∇g 線性相關, 即 $(1,\ldots,1)\parallel 2(x_1,\ldots,x_n)$ (+2) $\Leftrightarrow x_1=\cdots=x_n$ (+1) $\overset{\text{代入 } g=0}{\Longrightarrow} nx_1^2=1$ (+1)

$\Rightarrow x_1=\cdots=x_n=\pm\frac{1}{\sqrt{n}}$ (+1) 。

$f(\frac{1}{\sqrt{n}},\ldots,\frac{1}{\sqrt{n}})=\sqrt{n}$ (+1)　是極大值,

$f(\frac{-1}{\sqrt{n}},\ldots,\frac{-1}{\sqrt{n}})=-\sqrt{n}$ (+1)　是極小值。 (+1)

二. **(14)**　max/min　$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

subject to　$x-y-1=0 \quad \Leftrightarrow g(x,y,z)=0$

$y^2-z^2-1=0 \Leftrightarrow h(x,y,z)=0$

極值發生處 ∇f、∇g、∇h 線性相關, 即 $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & y & -z \end{vmatrix} = 0$ $\begin{pmatrix} +1 \\ +1 \\ +1 \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow xz+2yz=0$ (+2)。

$z=0 \overset{\text{代入 } h=0}{\Longrightarrow} y=1,-1 \Rightarrow x=2,0$ (+2) ;

$x=-2y \overset{\text{代入 } g=0}{\Longrightarrow} x=\frac{2}{3}, y=\frac{-1}{3}$ (+2) $\overset{\text{代入 } h=0}{\Longrightarrow} z^2=\frac{-8}{9}$ 沒有實解 (+2)。

$f(2,1,0)=5$ (+1)　是極大值,

$f(0,-1,0)=1$ (+1)　是極小值。 (+1)

禁止交談、傳遞物品、掀示考卷、放大畫面、四處張望 .... 做弊者、疑似做弊 警告後再犯者, 學期成績零分。