微積分　5 月 15 日 演習課 前 小考 解答　　（滿分: 18）

一. $\begin{array}{c} f(x,y,z) = xe^y + ye^z + ze^x \\ \vec{u} = (5,1,-2) \end{array}$ ，求 f 在 $(0,0,0)$ 處往 $\vec{u}$ 方向移動的微變化率以及 f 在 $(0,0,0)$ 處最大的微變化率。

$df = \nabla f \bullet d(x,y,z) = (e^y + ze^x, e^z + xe^y, e^x + ye^z) \bullet d(x,y,z)$ (1+1+1),　微弧長 $ds = \|d(x,y,z)\|$, $\frac{df}{ds}$ 就是微變化率

若 $d(x,y,z) /\!/ \vec{u}$, 則 $\frac{df}{ds}\Big|_{(0,0,0)} = (1,1,1) \bullet \frac{(5,1,-2)}{\|(5,1,-2)\|}$ (+1) $= \frac{4}{\sqrt{30}}$ (+1)

若 $d(x,y,z) /\!/ \nabla f$, 則 $\frac{df}{ds}\Big|_{(0,0,0)} = (1,1,1) \bullet \frac{(1,1,1)}{\|(1,1,1)\|}$ (+1) $= \sqrt{3}$ (+1) 最大

二. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$，求 f 之極值發生處及鞍點等。

$\begin{array}{l} f_x = 4(x^3 - y) \text{ (+1)} \\ f_y = 4(y^3 - x) \text{ (+1)} \end{array}$，令 $\begin{array}{l} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x^3 = y \\ y^3 = x \end{array} \Rightarrow x^9 = x \Rightarrow (x,y) = (-1,-1),\ (0,0),\ (1,1)$ (1+1+1)

$\begin{array}{l} f_{xx} = 12x^2 \text{ (+1)} \\ f_{xy} = f_{yx} = -4 \text{ (+1)} \\ f_{yy} = 12y^2 \text{ (+1)} \end{array}$，

令 $D(x,y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 144x^2y^2 - 16$,

$D(0,0) < 0$, $\therefore (0,0)$ 是鞍點, (+1)

$D(1,1) > 0$, 加上 $f_{xx}(1,1) = 12$, $\therefore f(1,1) = -1$ 是極小值。(+1)

$D(-1,-1) > 0$, 加上 $f_{xx}(-1,-1) = 12$, $\therefore f(-1,-1) = -1$ 是極小值。(+1)

禁止交談、傳遞物品、掀示考卷、放大畫面、四處張望 .... 做弊者、疑似做弊 警告後再犯者, 學期成績零分。

微積分　5 月 15 日 演習課 前 小考 解答　　（滿分: 19）

一. $\begin{array}{c} V(x,y,z) = 5x^2 - 3xy + xyz \\ \vec{u} = (1,1,-1) \end{array}$ ，求 V 在 $(3,4,5)$ 處往 $\vec{u}$ 方向移動的微變化率以及 V 在 $(3,4,5)$ 處最大的微變化率。

$dV = \nabla V \bullet d(x,y,z) = (10x - 3y + yz, -3x + xz, xy) \bullet d(x,y,z)$ (1+1+1),　微弧長 $ds = \|d(x,y,z)\|$, $\frac{dV}{ds}$ 就是微變化率

若 $d(x,y,z) /\!/ \vec{u}$, 則 $\frac{dV}{ds}\Big|_{(3,4,5)} = (38,6,12) \bullet \frac{(1,1,-1)}{\|(1,1,-1)\|}$ (+1) $= \frac{32}{\sqrt{3}}$ (+1)

若 $d(x,y,z) /\!/ \nabla V$, 則 $\frac{dV}{ds}\Big|_{(3,4,5)} = (38,6,12) \bullet \frac{(38,6,12)}{\|(38,6,12)\|}$ (+1) $= \sqrt{1624}$ (+1) 最大

二. $f(x,y) = y^3 + 3x^2y - 6x^2 - 6y^2 + 2$，求 f 之極值發生處及鞍點等。

$\begin{array}{l} f_x = 6x(y-2) \text{ (+1)} \\ f_y = 3(x^2 + y^2 - 4y) \text{ (+1)} \end{array}$，令 $\begin{array}{l} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x(y-2) = 0 \\ x^2 + y^2 = 4y \end{array} \Rightarrow (x,y) = (0,0),\ (0,4),\ (2,2),\ (-2,2)$ (1+1+1+1)

$\begin{array}{l} f_{xx} = 6(y-2) \text{ (+1)} \\ f_{xy} = f_{yx} = 6x \text{ (+1)} \\ f_{yy} = 6(y-2) \text{ (+1)} \end{array}$，

令 $D(x,y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 36\big((y-2)^2 - x^2\big)$,

$D(2,2) = D(-2,2) < 0$, $\therefore (2,2), (-2,2)$ 是鞍點, (+1)

$D(0,4) > 0$, 加上 $f_{xx}(0,4) = 12$, $\therefore f(0,4) = -30$ 是極小值 (+1)

$D(0,0) > 0$, 加上 $f_{xx}(0,0) = -12$, $\therefore f(0,0) = 2$ 是極大值。(+1)

禁止交談、傳遞物品、掀示考卷、放大畫面、四處張望 .... 做弊者、疑似做弊 警告後再犯者, 學期成績零分。