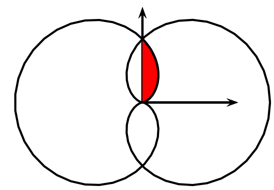
微積分 3 月 27 日 演習課 前 小考 解答 (滿分: 15)

一. 求 $r = 1 + \cos\theta$ 內區域 與 $r = 1 - \cos\theta$ 內區域 交集之面積。



令 $1 + \cos\theta = 1 - \cos\theta$, $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ (+1)

小片 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)^2 \, d\theta$ (+1) $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 - 2\cos\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2}) \, d\theta$ (+1)

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{3}{4} - \cos\theta) \, d\theta$ (+1) $= \left[\frac{3}{4}\theta - \sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$ (+1) $= \frac{3\pi}{8} - 1$ (+1), 四小片 $= \frac{3\pi}{2} - 4$ (+1)

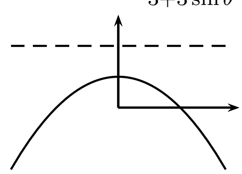
二. 求 $r = e^{2\theta}, \theta \in [0, 2\pi]$ 的弧長。

$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\frac{dr}{d\theta}^2 + r^2} \, d\theta$, 弧長 $= \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{dr}{d\theta}^2 + r^2} \, d\theta$ (+1) $= \int_0^{2\pi} \sqrt{5} e^{2\theta} \, d\theta$ (+1) $= \left[\frac{\sqrt{5}}{2} e^{2\theta}\right]_0^{2\pi}$ (+1) $= \frac{\sqrt{5}}{2}(e^{4\pi} - 1)$ (+1)

三. 寫出 以原點爲焦點、離心率 1.5、$y = 3$ 爲準線 的 極座標方程式。

$$r = \frac{4.5}{1 + 1.5\sin\theta}$$ (+1)

畫出 $r = \frac{2}{3+3\sin\theta}$ 圖形, 寫出 離心率及準線方程式。



(+1)

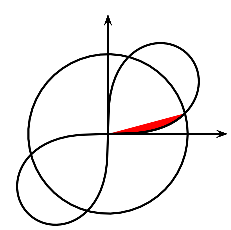
離心率 $= 1$ (+1)

準線 $y = \frac{2}{3}$ (+1)

禁止交談、傳遞物品、掀示考卷、放大畫面、四處張望 .... 做弊者、疑似做弊 警告後再犯者, 學期成績零分。

微積分 3 月 27 日 演習課 後 小考 解答 (滿分: 15)

一. 求 $r^2 = 2\sin 2\theta$ 內區域 與 $r = 1$ 內區域 交集之面積。



令 $2\sin 2\theta = 1$, $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$ 在第一象限 (夾角 $\frac{\pi}{3}$), 另兩個角在第三象限。(+2)

小片 $= \int_0^{\frac{\pi}{12}} \sin 2\theta \, d\theta$ (+1) $= \left[\frac{-1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{12}}$ (+1) $= \frac{2-\sqrt{3}}{4}$ (+1), $\left(\frac{1}{6}\text{單位圓} + \text{兩小片}\right) \times 2$ (+1) $= \frac{\pi}{3} + 2 - \sqrt{3}$ (+1)

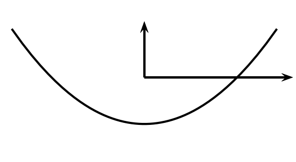
二. 求 $r = \theta^2, \theta \in [0, 2\pi]$ 的弧長。

弧長 $= \int_0^{2\pi} \sqrt{4 + \theta^2} \cdot \theta \, d\theta$ (+1) $= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{4 + \theta^2} \, d(4 + \theta^2)$ (+1) $= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(4 + \theta^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2\pi}$ (+1) $= \frac{8}{3}\left[(1 + \pi^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right]$ (+1)

三. 寫出 以原點爲焦點、離心率 0.5、$r = 4\sec\theta$ 爲準線 的 極座標方程式。

$$r = \frac{2}{1 + 0.5\cos\theta}$$ (+1)

畫出 $r = \frac{5}{2-2\sin\theta}$ 圖形, 寫出 離心率及準線方程式。



(+1)

離心率 $= 1$ (+1)

準線 $y = \frac{-5}{2}$ (+1)

禁止交談、傳遞物品、掀示考卷、放大畫面、四處張望 .... 做弊者、疑似做弊 警告後再犯者, 學期成績零分。