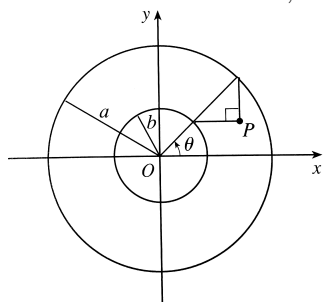


微積分 3月20日演習課前小考解答 (滿分: 13)

一. P 點座標隨 θ 而改變, 如圖. 推導出 P 點軌跡的 θ 參數式。



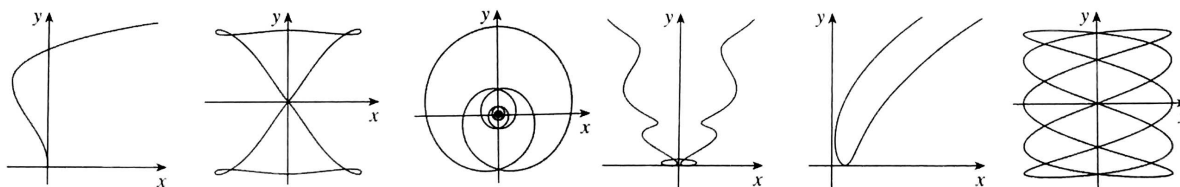
很明顯地, P 點的座標 (x, y) 為:

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \quad (+1) \\ y = b \sin \theta \quad (+1) \end{cases}$$

二. 求 $r = 1 + \sin \theta$ 封閉曲線的週長及所圍面積。

$$\begin{aligned} \text{週長} &= \int_0^{2\pi} r \, d\theta \quad (+1) = \int_0^{2\pi} (1 + \sin \theta) \, d\theta = 2\pi \quad (+1) \\ \text{面積} &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta \quad (+1) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 + 2 \sin \theta + \sin^2 \theta) \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \sin \theta + \frac{1 - \cos 2\theta}{4} \right) \, d\theta \quad (+1) = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2}\pi \quad (+1) \end{aligned}$$

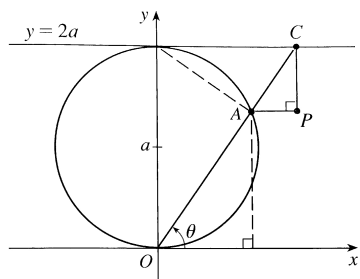
- 三. III $x = \frac{\sin 2t}{4+t^2}, y = \frac{\cos 2t}{4+t^2}$ II $x = \sin 2t, y = \sin(t + \sin 2t)$ I $x = t^2 - 2t, y = \sqrt{t}$
VI $x = \cos 5t, y = \sin 2t$ V $x = t^4 - t + 1, y = t^2$ IV $x = t + \sin 4t, y = t^2 + \cos 3t$



禁止交談、傳遞物品、掀示考卷、放大畫面、四處張望 作弊者、疑似作弊 警告後再犯者, 學期成績零分。

微積分 3月20日演習課後小考解答 (滿分: 18)

一. P 點座標隨 θ 而改變, 如圖. 推導出 P 點軌跡的 θ 參數式。



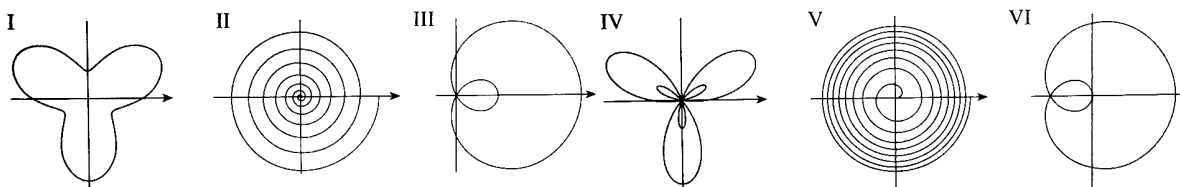
很明顯地, $\|\overline{OA}\| = 2a \sin \theta \quad (+1)$, $\|\overline{OC}\| = \frac{2a}{\sin \theta} \quad (+1)$
 $\therefore P$ 點的座標 (x, y) 為:

$$\begin{cases} x = \frac{2a}{\sin \theta} \cdot \cos \theta \quad (+1) \\ y = 2a \sin \theta \cdot \sin \theta \quad (+1) \end{cases}$$

二. p 點在半徑為 r 的圓邊邊上, 圓滾動一圈, 則 p 劃出一軌跡. 求其弧長。

$$\begin{aligned} \text{擺線} \quad \begin{cases} x = r(t - \sin t) \quad (+1) \\ y = r(1 - \cos t) \quad (+1) \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{x} = r(1 - \cos t) \\ \dot{y} = r \sin t \end{cases}, \quad \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \, dt = r \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} \, dt \quad (+2) \\ = 2r \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}} \, dt \quad (+1) = 2r \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} \, dt \quad (+1) = 2r [-2 \cos \frac{t}{2}]_0^{2\pi} \quad (+1) = 2r[2 + 2] = 8r \quad (+1) \end{aligned}$$

- 三. VI $r = \cos(\frac{\theta}{3})$ IV $r = 1 + 2 \sin 3\theta$ III $r = 1 + 2 \cos \theta$
I $r = 2 + \sin 3\theta$ II $r = \theta^2$ V $r = \sqrt{\theta}$



禁止交談、傳遞物品、掀示考卷、放大畫面、四處張望 作弊者、疑似作弊 警告後再犯者, 學期成績零分。