微積分　3 月 13 日 演習課 **前** 小考 解答　　　(滿分: 12)

一. $a_n = \frac{(n!)^k}{(kn)!}x^n$ 。求 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 的收斂半徑。

令 $|\mathrm{R}|$: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ (+1) , 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^k|x|}{(kn+1)\cdots(kn+k)}$ (+1)

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^k|x|}{(k+\frac{1}{n})\cdots(k+\frac{k}{n})}$ (+1) $= \frac{|x|}{k^k} < 1$ (+1) , 即 $|x| < k^k$ 。收斂半徑 $= k^k$ (+1) 。

二. 求 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x}}$ 對 0 的展開式和收斂域不含端點。寫出非零的前四項即可。

$f(x) = \frac{1}{2}(1+\frac{-x}{4})^{\frac{-1}{2}}$ (+1) $\overset{|\frac{-x}{4}|<1}{=} \frac{1}{2}\left(1+\binom{-1/2}{1}(\frac{-x}{4})^1+\binom{-1/2}{2}(\frac{-x}{4})^2+\binom{-1/2}{3}(\frac{-x}{4})^3+\cdots\right)$ (+1)

$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{\frac{-1}{2}}{1}\frac{-x}{4}+\underbrace{\frac{-1}{2}\frac{-3/2}{2}}_{3/8}(\frac{x}{4})^2+\underbrace{\frac{3}{8}\frac{-5/2}{3}}_{-5/16}(\frac{-x}{4})^3+\cdots\right)$ (+2)

$= \frac{1}{2}+\frac{1}{16}x+\frac{3}{256}x^2+\frac{5}{2048}x^3+\cdots$ (+2), $|\frac{-x}{4}| < 1 \Leftrightarrow x \in (-4,4)$ 收斂域不含端點 (+1)。

禁止交談、傳遞物品、掀示考卷、放大畫面、四處張望 .... 做弊者、疑似做弊 警告後再犯者, 學期成績零分。

微積分　3 月 13 日 演習課 **後** 小考 解答　　　(滿分: 12)

一. 求 $f(x) = \frac{x+2}{2x^2-x-1}$ 對 0 的展開式和收斂域。用 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\ )$ 符號表示。

$f(x) = \frac{-1}{2x+1}+\frac{1}{x-1}$ (+1) $= \frac{-1}{1-(-2x)}-\frac{1}{1-x} \overset{\substack{|-2x|<1 \\ 且\ |x|<1}}{=} -\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n - \sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n = -\sum\limits_{n=0}^{\infty}((-2)^n+1)x^n$ (+1),

收斂域必包含 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\cap(-1,1) = (\frac{-1}{2},\frac{1}{2})$ (+1), 檢查端點: 由於 $\left|\frac{(-2)^n+1}{2^n}\right| \xrightarrow{n\to\infty} 1 \neq 0$ (+1), 故 $x = \frac{-1}{2},\frac{1}{2}$ 時級數皆發散 (+1), 收斂域確認爲 $(\frac{-1}{2},\frac{1}{2})$ (+1)。

二. 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 的收斂值。

令 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ (+1) , $\int f(x)\,dx = C_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n = C_1+\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n \overset{|x|<1}{=} C_1+\frac{1}{1-x}$ (+1) ,

$\therefore f(x) \overset{|x|<1}{=} (C_1+\frac{1}{1-x})'$ (+1) $= \frac{1}{(1-x)^2}$ (+1) , 有鑑於 $|\frac{1}{2}| < 1$ (+1) , $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n} = \frac{f(\frac{1}{2})}{2} = 2$ (+1)

或者,

令 $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$ (+1) , $\int\frac{g(x)}{x}\,dx = C_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n = C_1+\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n \overset{|x|<1}{=} C_1+\frac{1}{1-x}$ (+1) ,

$\therefore \frac{g(x)}{x} \overset{|x|<1}{=} (C_1+\frac{1}{1-x})'$ (+1) $= \frac{1}{(1-x)^2}$ (+1) , 即 $g(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$, 有鑑於 $|\frac{1}{2}| < 1$ (+1) , $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n} = g(\frac{1}{2}) = 2$ (+1)

禁止交談、傳遞物品、掀示考卷、放大畫面、四處張望 .... 做弊者、疑似做弊 警告後再犯者, 學期成績零分。