微積分　3 月 6 日 演習課 前 小考 解答　　（滿分: 15）

一. $a_n = \frac{n^n}{n!}$ 。正確地論述 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 之斂散性。

R : $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (+1) $= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^n \cancel{(n+1)}}{\cancel{n!}\cancel{(n+1)}}}{\frac{n^n}{\cancel{n!}}}$ (+1) $= \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n$ (+1) $= e > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散 (+1) 。

二. 填空。絕對收斂 A，條件收斂 C，發散 D。

$\sum_n \frac{\sin(4n)}{4^n}$ $\boxed{\text{A}}$　$\sum_n \frac{\cos(\frac{n\pi}{3})}{n!}$ $\boxed{\text{A}}$　$\sum_n \frac{(-1)^n \arctan n}{n^2}$ $\boxed{\text{A}}$　$\sum_n \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ $\boxed{\text{C}}$　$\sum_n \frac{(-2)^n}{n^2}$ $\boxed{\text{D}}$

三. $a_n = \frac{(x-3)^n}{n}$ 。求: 使得 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂之所有 x, 即: 該級數之收斂域。

令 |R| : $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ (+1) (令 類公比小於 1), 即 $\lim_{n\to\infty} \frac{|x-3|/(n+1)}{1/n} = |x-3| < 1$ (+1) , 即 $x \in (2,4)$ (+1) , 則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 收斂。討論類公比等於 1。若 $x = 2 : \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收斂; (+1) 若 $x = 4 : \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 發散; (+1) 故收斂域爲 $[2,4)$ (+1) 。

禁止交談、傳遞物品、掀示考卷、放大畫面、四處張望 .... 做弊者、疑似做弊 警告後再犯者, 學期成績零分。

微積分　3 月 6 日 演習課 後 小考 解答　　（滿分: 8）

一. $a_n = \left(\frac{-2n}{n+1}\right)^{5n}$ 。正確地論述 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 之斂散性 (絕對收斂、條件收斂、發散)。

N: $\lim_{n\to\infty} |a_n|$ (+1) $= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^n}{(1+\frac{1}{n})^n}\right)^5$ (+1) $= \lim_{n\to\infty} (\frac{2^n}{e})^5 = \infty \neq 0$ (+1) , $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散 (+1) 。

二. $a_n = \frac{(-1)^n \, 2^n \, n!}{5\cdot 8\cdot 11\cdots(3n+2)}$ 。正確地論述 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 之斂散性 (絕對收斂、條件收斂、發散)。

|R| : $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ (+1) $= \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{(3n+5)}$ (+1) $= \frac{2}{3} < 1$ (+1) , $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 絕對收斂 (+1) 。

禁止交談、傳遞物品、掀示考卷、放大畫面、四處張望 .... 做弊者、疑似做弊 警告後再犯者, 學期成績零分。