微積分　2 月 20 日 演習課 **前** 小考 解答　　（滿分: 9）

一. $a_1 = 1, a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n}\ \forall n \in \mathbb{N}$。正確地論述數列 a_n 之斂散性, 收斂 則求其收斂值。

(懷疑 a_n 遞增又有上界) 顯然 $1 \le a_1 < a_2 < 3$ 成立 (+1)。《 歸納法 》若 $1 \le a_n < a_{n+1} < 3$ 成立, 則 $\frac{1}{1} \ge \frac{1}{a_n} > \frac{1}{a_{n+1}} > \frac{1}{3} > 0$, $\frac{-1}{1} \le \frac{-1}{a_n} < \frac{-1}{a_{n+1}} < 0$, $3-\frac{1}{1} \le 3-\frac{1}{a_n} < 3-\frac{1}{a_{n+1}} < 3$, 即 $2 \le a_{n+1} < a_{n+2} < 3$ (+1) 也 同樣有 $1 \le a_{n+1} < a_{n+2} < 3$ (+1) , 證明了 a_n 遞增又有上界, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在 (+1), 令此極限值為 L, 於是有 $\Rightarrow L = 3 - \frac{1}{L} \Leftrightarrow L^2 - 3L + 1 = 0$ (+1) $\Leftrightarrow L = \underbrace{\cancel{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}}_{\approx 0.3819\ldots}\ , \underbrace{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}_{\approx 2.618\ldots}$ (+1)

二. 以『極限比較法』正確地論述 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$ 之斂散性。

已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收斂 (+1)。$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^n-1}}{\frac{1}{2^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{2^n}} = 1$ (+1) , 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$ 收斂 (+1)。

禁止交談、傳遞物品、掀示考卷、放大畫面、四處張望 ....做弊者、疑似做弊 警告後再犯者, 學期成績零分。

微積分　2 月 20 日 演習課 **後** 小考 解答　　（滿分: 9）

一. $10.1\overline{35}$ 表示成分數。

$10.1\overline{35} = 10.1 + .035(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \cdots)$ (+1) $= \frac{101}{10} + \frac{35}{990}$ (+1) $= \frac{101*99+35}{990} = \frac{10034}{990}$ (+1) $= \frac{5017}{495}$

二. 正確地論述數列 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+3)}$ 之斂散性, 收斂 則求其收斂值。

$0 < \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+3)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3})$ (+1) $= \frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{4}} + \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{5}} + \frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{6}} + \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{7}} + \cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{8}} + \cdots$ (+1) $= \frac{11}{6}$ (+1)

三. 與 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 做大小比較, 論述 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 之斂散性。

$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1\cdot 2}$, $\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2\cdot 3}$, $\cdots \overset{\text{加總}}{\Longrightarrow} \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ (+1), $= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots = 1$ (+1) , 即 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1$,

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2$, 收斂 (+1)

禁止交談、傳遞物品、掀示考卷、放大畫面、四處張望 ....做弊者、疑似做弊 警告後再犯者, 學期成績零分。