微積分 之『積分技巧、瑕積分等』 班級______ 學號__________________ 座號___ 姓名 ***Grading Key*** 分數 **42**

每道題必須整齊列出有效之計算、推導式子於給定空白處方予計分。不依指示做答 該題 0 分。

1.**(6)** 求 $\int \cos\sqrt{x}\,dx$ 。令 $x=u^2$,

$$\text{原式} = \int \cos u \cdot 2u\,du \ (+2)$$
$$= 2\int u\,d(\sin u) \ (+1)$$
$$\overset{\text{ibp}}{=} 2\left(u\sin u - \int \sin u\,du\right) \ (+1)$$
$$= 2(u\sin u - \cos u) \ (+1)$$
$$= 2(\sqrt{x}\sin\sqrt{x} - \cos\sqrt{x}) \ (+1)$$

2.**(5)** 求 $\int (\tan^2 x + \tan^4 x)\,dx$ 。

$$\text{原式} = \int \tan^2 x(1+\tan^2 x)\,dx \ (+1)$$
$$= \int \tan^2 x\sec^2 x\,dx \ (+1)$$
$$= \int \tan^2 d(\tan x) \ (+1)$$
$$= \tfrac{1}{3}\tan^3 x \ (+2)$$

3.**(7)** 求 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{9+x^6}\,dx$ 。

令 $x^3 = 3u$ $(+1)$,

$$\text{原式} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{9\,(1+u^2)} \ (+2)$$
$$= \frac{1}{9}\Big[\arctan u\Big]_{-\infty}^{\infty} \ (+2)$$
$$= \frac{1}{9}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{9} \ (+2)$$

4.**(11)** 求 $\int \frac{1}{x^3-1}\,dx$ 。

$$\text{原式} = \int \left(\frac{\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{\frac{-1}{3}x - \frac{2}{3}}{x^2+x+1}\right) dx \ (^1 + {}^{1+1}) = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{2}d(x^2+x+1) + \frac{3}{2}dx}{x^2+x+1} \ (1 + {}^{1+1})$$
$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \ (\sim +1 + {}_{1+1})$$
$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \ (\sim + \sim +2)$$

5.**(13)** 求 $x=\sqrt{a^2-y^2}$, $y\in[0,\frac{a}{2}]$ 的 弧長: "$\int ds$" $= \int_0^{\frac{\pi}{6}} a\,d\theta$ $(+2)$ $= \frac{\pi}{6}a$ $(+1)$

這個弧線對 y-軸 旋轉 的表面積: "$\int 2\pi x\cdot ds$" $= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}} a\cos\theta\cdot a\,d\theta$ $(+2)$ $= \cancel{2}\,\pi\,a^2\cdot\cancel{\tfrac{1}{2}}$ $(+1)$

求 $0\le x\le\sqrt{a^2-y^2}$, $y\in[0,\frac{a}{2}]$ 這個區域的 面積:

"$\int x\,dy$" $= a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2\theta\,d\theta$ $(+2)$ $= a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$ $(+1)$ $= \frac{a^2}{2}(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4})$ $(+1)$

這個區域對 y-軸 旋轉 的體積: "$\int \pi x^2 dy$" $= \pi\int_0^{\frac{a}{2}}(a^2-y^2)\,dy$ $(+2)$ $= \pi a^3\cdot\frac{11}{24}$ $(+1)$

過程、算式 寫於背面 或 此線以下 (草稿區) 皆不記分

\# 5.1 $ds = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \sqrt{(\frac{dx}{dy})^2+1}\,dy = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{-2y}{\sqrt{a^2-y^2}}\right)^2+1}\,dy = \cdots = \frac{a}{\sqrt{a^2-y^2}}\,dy$, 遲早要換 , ∴ NG 。

\# 5.2 用 # 5.1 的 NG 結果, "$\int 2\pi x\,ds$" $= \int_0^{\frac{a}{2}} 2\pi\cancel{\sqrt{a^2-y^2}}\frac{a\,dy}{\cancel{\sqrt{a^2-y^2}}} = 2\pi a\int_0^{\frac{a}{2}} dy = \pi a^2$ 。

\# 5.3 "$\int x\,dy$" $= \int_0^{\frac{a}{2}}\sqrt{a^2-y^2}\,dy \overset{y=a\sin\theta}{=} \cdots$, 遲早要換 , ∴ NG 。

\# 5.4 "$\int \pi x^2\,dy$" $= \int_0^{\frac{\pi}{6}} a^2\cos^2\theta\cdot a\,d(\sin\theta) = \int_0^{\frac{1}{2}} a^3(1-s^2)\,ds = a^3(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}(\frac{1}{2})^3)$ 。

反正誰快就用誰, 畢竟咧、會的招數 ≤ 1 就沒得選 ...

禁止交談、傳遞物品、掀示考卷、四處張望 .... 做弊者、疑似做弊 警告後再犯者, 以零分計算。