Exact (正合, 正好, 恰恰好, 嘟嘟好)

給定一個一階微分方程 $M\,dx + N\,dy = 0$, 如果存在一個 $\Phi(x, y)$, 使得 $d\Phi = M\,dx + N\,dy$, 則此微分方程稱爲 exact。

如果這樣的 Φ 存在, 因爲 $d\Phi = \Phi_x\,dx + \Phi_y\,dy$, 也就是 $\begin{array}{c} M = \Phi_x \\ N = \Phi_y \end{array}$, 則 $\begin{array}{c} \Phi = \int \Phi_x\,dx = \int M\,dx \\ \Phi = \int \Phi_y\,dy = \int N\,dy \end{array}$ 。

那麼要怎麼判斷 $M\,dx + N\,dy = 0$ 是否爲 exact? 如果 $M_y = N_x$, 就表示有這樣的 Φ 且二次可微, 即 $(\Phi_x)_y = (\Phi_y)_x$, 即 $M_y = N_x$。如果 M, N 不是一階可微, 就不必看了。

例 $\Phi = xy$, 則 $d\Phi = y\,dx + x\,dy$。所以微分方程 $d\Phi = 0$ 是 exact。

例 $\Phi = x^2y$, 則 $d\Phi = 2xy\,dx + x^2\,dy$。所以微分方程 $d\Phi = 0$ 是 exact。但消去公因式後, $2y\,dx + x\,dy = 0$ 就不是 exact 了。

例 $\Phi = xe^y$, 則 $d\Phi = e^y\,dx + xe^y\,dy$。所以微分方程 $d\Phi = 0$ 是 exact, 但消去公因式後, $dx + x\,dy = 0$ 就不是 exact 了。

例 $\Phi = x^2y^2 + xy + y^3$, 則 $d\Phi = (2xy^2 + y)\,dx + (2x^2y + x + 3y^2)\,dy$。忘記 Φ 以及剛剛做過的事。
現在解 $(2xy^2 + y)\,dx + (2x^2y + x + 3y^2)\,dy = 0$。
因爲 $(2xy^2 + y)_y = (2x^2y + x + 3y^2)_x$, 所以

$$\begin{array}{lll} \Phi = \int (2xy^2 + y)\,dx & = x^2y^2 + xy + c_1, & c_1 \text{ 與 } x \text{ 無關} \Rightarrow \text{取 } c_1 = y^3, \\ \Phi = \int (2x^2y + x + 3y^2)\,dy & = x^2y^2 + xy + y^3 + c_2, & c_2 \text{ 與 } y \text{ 無關} \Rightarrow \text{取 } c_2 = 0, \end{array}$$

$\therefore \Phi = x^2y^2 + xy + y^3$, 原方程的解 即 $x^2y^2 + xy + y^3 = C$ 。

自己隨便寫一個可微的函數 Φ, 令它的 differential 爲 0, 當然這個一階微分方程是 exact, 而且這個微分方程的解就是 $\Phi(x, y) = C$ 。把這個微分方程的來源忘記, 自己做一次。

Integrating Factor (積分因子)

$M\,dx + N\,dy = 0$ not exact: $M_y - N_x \neq 0$ 但 乘一個 I 後 $IM\,dx + IN\,dy = 0$ 變成 exact: $(IM)_y = (IN)_x$, 即 $I(M_y - N_x) = I_xN - I_yM$。如果 $I = f(g(x, y))$ (未知的單變量函數 f 與 已知函數 g 的合成), 則 $\left\{ \begin{array}{l} I_x = f' \cdot g_x \\ I_y = f' \cdot g_y \end{array} \right.$, $I(M_y - N_x) = I_xN - I_yM$ 變成 $\frac{f'}{f} = \frac{M_y - N_x}{g_xN - g_yM}$, 即 $\frac{M_y - N_x}{g_xN - g_yM}$ 是 g 的函數。至少試試 不必特別計算簡單的 $g = x,\ y,\ x + y,\ x - y,\ xy,\ \cdots$

例 $(x^2 + y^2 + x)\,dx + (xy)\,dy = 0$
$M_y - N_x = 2y - y = y$, $\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{1}{x}$ 是 x 的函數, 所以 $\frac{I_x}{I} = \frac{1}{x}$, $\frac{dI}{I} = \frac{dx}{x}$, $\ln I = \ln x + c_1$, $I = c_2x$。原式 $\xrightarrow{\cdot x} (x^3 + xy^2 + x^2)\,dx + (x^2y)\,dy = 0$,

$$\begin{array}{ccc} \Phi := \int (x^3 + xy^2 + x^2)\,dx & = & \int (x^2y)\,dy\ , \\ \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^3}{3} + c_1 & = & \frac{x^2y^2}{2} + c_2 \\ (c_1 \text{ 與 } x \text{ 無關} \Rightarrow \text{取 } c_1 = 0) & & c_2 \text{ 與 } y \text{ 無關} \Rightarrow \text{取 } c_2 = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}) \end{array}$$

$\therefore \Phi = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^3}{3}$, 原方程的解 即 $\frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^3}{3} = C$。

例 $(y^4+2y)\,dx+(xy^3+2y^4-4x)\,dy=0$
$M_y-N_x=(4y^3+2)-(y^3-4)=3(y^3+2)$, $\frac{M_y-N_x}{-M}=\frac{-3}{y}$ 是 y 的函數, 所以 $\frac{I_y}{I}=\frac{-3}{y}$, $\frac{dI}{I}+3\frac{dy}{y}=0$, $\ln I+3\ln y=c_1$, $I=\frac{c_2}{y^3}$。原式 $\xrightarrow{\cdot\frac{1}{y^3}}(y+\frac{2}{y^2})\,dx+(x+2y-\frac{4x}{y^3})\,dy=0$,

$$\begin{array}{rcl}
\Phi:=\int(y+\frac{2}{y^2})\,dx & = & \int(x+2y-\frac{4x}{y^3})\,dy \\
xy+\frac{2x}{y^2}+c_1 & = & xy+y^2+\frac{2x}{y^2}+c_2 \\
(c_1 \text{ 與 } x \text{ 無關 } \Rightarrow \text{ 取 } c_1=y^2) & & (c_2 \text{ 與 } y \text{ 無關} \Rightarrow \text{ 取 } c_2=0)
\end{array}$$

$\therefore \Phi=xy+\frac{2x}{y^2}+y^2$, 原方程的解 即 $xy+\frac{2x}{y^2}+y^2=C$。

例 $x\,dx+(y+4x^2y^3+4y^5)\,dy=0$
$M_y-N_x=(0)-(8xy^3)$, $\frac{M_y-N_x}{-M}=8y^3$ 是 y 的函數, 所以 $\frac{I_y}{I}=8y^3$, $\frac{dI}{I}=8y^3\,dy$, $\ln I=2y^4+c_1$, $I=c_2e^{2y^4}$。原式 $\xrightarrow{\cdot e^{2y^4}}\underline{xe^{2y^4}\,dx}+\underline{ye^{2y^4}\,dy}+\underline{4x^2y^3e^{2y^4}\,dy}+\underline{4y^5e^{2y^4}\,dy}=0$, $\underline{d(\frac{1}{2}x^2e^{2y^4})}+\underline{d(\frac{1}{2}y^2e^{2y^4})}=0$, 即: $(x^2+y^2)e^{2y^4}=C$。或 規規矩矩來:

原式 $\xrightarrow{\cdot e^{2y^4}}(xe^{2y^4})\,dx+(y+4x^2y^3+4y^5)e^{2y^4}\,dy=0$,

$$\begin{array}{rcl}
\Phi:=\int(xe^{2y^4})\,dx & = & \int(y+4x^2y^3+4y^5)e^{2y^4}\,dy \\
\frac{1}{2}x^2e^{2y^4}+c_1 & = & \frac{1}{2}x^2e^{2y^4}+\frac{1}{2}y^2e^{2y^4}+c_2 \\
(c_1 \text{ 與 } x \text{ 無關 } \Rightarrow \text{ 取 } c_1=\frac{1}{2}y^2e^{2y^4}) & & (c_2 \text{ 與 } y \text{ 無關} \Rightarrow \text{ 取 } c_2=0)
\end{array}$$

$\therefore \Phi=\frac{1}{2}(x^2+y^2)e^{2y^4}$, 原方程的解 即 $(x^2+y^2)e^{2y^4}=C$。
積分因子也可以是 $I=\frac{1}{x^2+y^2}$:

$$\begin{array}{rcl}
x\,dx+(y+4x^2y^3+4y^5)\,dy=0 & \xrightarrow{\cdot\frac{1}{x^2+y^2}} & \frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}+4y^3\,dy=0 \\
 & \Longleftrightarrow & d(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+y^4)=0 \\
 & \Longleftrightarrow & \ln(x^2+y^2)+2y^4=C \\
 & \Longleftrightarrow & (x^2+y^2)e^{2y^4}=C
\end{array}$$

事後聰明: 若 $\begin{array}{l} I=f\circ g, \\ g:=x^2+y^2, \end{array}$ 則 $\frac{f'}{f}=\frac{M_y-N_x}{g_xN-g_yM}$ 是 g 的函數。
檢驗: $\frac{M_y-N_x}{g_xN-g_yM}=\frac{-8xy^3}{2(xy+4x^3y^3+4xy^5-xy)}=\frac{-1}{x^2+y^2}$, 確實是 g 的函數。
即: $\frac{f'}{f}=\frac{-1}{g},\Leftrightarrow\frac{df}{f}+\frac{dg}{g}=0,\Leftrightarrow fg=C$。取 $f=\frac{1}{g}$, 即: 取 $I=\frac{1}{x^2+y^2}$。
原式 $\xrightarrow{\cdot\frac{1}{x^2+y^2}}\frac{x}{x^2+y^2}dx+(\frac{y}{x^2+y^2}+4y^3)\,dy=0$,

$$\begin{array}{rcl}
\Phi:=\int\frac{x}{x^2+y^2}\,dx & = & \int(\frac{y}{x^2+y^2}+4y^3)\,dy \\
\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+c_1 & = & \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+y^4+c_2 \\
(c_1 \text{ 與 } x \text{ 無關 } \Rightarrow \text{ 取 } c_1=y^4) & & (c_2 \text{ 與 } y \text{ 無關} \Rightarrow \text{ 取 } c_2=0)
\end{array}$$

$\therefore \Phi=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+y^4$, 原方程的解 即 $\ln(x^2+y^2)+2y^4=C_1 \iff (x^2+y^2)e^{2y^4}=C_2$。